Departamento de Matemática e Estatística

Universidade Federal de São João del-Rei

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ

Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT- Eng. Elétrica - Integral

Prova	2^a Avaliação de Álgebra Linear - 24/06/2025
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÃO** ser corrigida no parênteses.
- Só serão corrigidas 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a **Não** ser considerada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 08:00 as 09:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª) **Questão (   ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre a matriz linha reduzida à forma escada da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 11 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução: Temos que:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & -15 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & -20 & -35 & -17 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -12 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 15 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 21 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & -155 & 43 & -150 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -12 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -32/5 & 147/5 \\ 0 & 0 & 0 & 105 & -212 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -12 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -147/32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2ª) **Questão (   ) (Valor 6.0 Pontos):**

(a) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $u = (-1, 1, 0)$.

(b) Verifique se o conjunto $S = \{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

(a) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ dado por $\{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Assim, como

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

segue que este conjunto é LI, e sendo formado por 3 vetores, ele é uma base para o $\mathbb{R}^3$.

(b) Como $S = \{(2,2,3), (-1,-2,1), (0,1,0)\}$ tem 3 vetores, para ele ser um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ ele precisa ser LI. Assim, como

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+3) = -5 \neq 0,$$

segue que este conjunto é LI e, portanto, um conjunto gerador do $\mathbb{R}^3$.

3ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Discuta e encontre, se existir, uma solução para o sistema linear
$$s : \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = -1 \\ 4x + y - 2z = -3 \\ -x - y + z = 1 \end{cases}.$$

Solução: Observe que:

$$s \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \\ 0 & 5 & 6 & -11 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & -69 & 9 \\ 0 & 0 & 29 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{69} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{40}{23} \end{array}\right].$$

Como o posto da matriz estendida é 4 e da matriz principal é 3, segue que o sistema é impossível.

4ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Suponha que $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ seja um conjunto LI de vetores de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Mostre que $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ também é LI, onde

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3, \ \ u_2 = v_2 + v_3, \ \ \text{e} \ \ u_3 = v_3.$$

Solução: Considere uma combinação linear dos vetores u_1, u_2 e u_3 dando o vetor nulo. Assim,

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Rightarrow \alpha(v_1 + v_2 + v_3) + \beta(v_2 + v_3) + \gamma v_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha)v_1 + (\alpha + \beta)v_2 + (\alpha + \beta + \gamma)v_3 = 0.$$

Como $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto LI dando o vetor nulo, segue que

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto LI.

5ª) **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):**

a) O Conjunto $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = a + b + 1\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

b) O Conjunto $W = \{(a,1,1) \in \mathbb{R}^3; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

Solução:

a) Se $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3; a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = a + b + 1\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, então, $(0,0,0) \in U$. Contudo, se $a = b = 0$, segue que $c = 1$ e, portanto, $(0,0,0) \notin U$. Portanto, U não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

b) Se $W = \{(a,1,1) \in \mathbb{R}^3; a \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, então, $(0,0,0) \in W$. Contudo, se $a = 0$, segue que $(0,0,0) \notin U$. Portanto, U não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

6ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Mostre que os vetores $C = \{u_1, u_2, u_3\}$, onde $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,3)$ e $u_3 = (1,4,9)$, formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Exprima cada um dos vetores de $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, onde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ da base canônica de $\mathbb{R}^3$, como combinação linear de u_1, u_2 e u_3. Encontre $[M]_C^B$.

Solução: Como $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ possui três vetores, se eles forem LI, eles formam uma base para o $\mathbb{R}^3$. Observe que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-1 & 4-1 \\ 3-1 & 9-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0.$$

Portanto, $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto LI e, consequentemente, uma base para $\mathbb{R}^3$.

Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que,

$$(x,y,z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(1,4,9) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & x \\ \alpha & + & 2\beta & + & 4\gamma & = & y \\ \alpha & + & 3\beta & + & 9\gamma & = & z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & x \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & y - x \\ & & 2\beta & + & 8\gamma & = & z - x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & x \\ & & \beta & + & 3\gamma & = & y - x \\ & & & & 2\gamma & = & z - 2y + x \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & 3x - 3y + z \\ \beta & = & \dfrac{-5x + 8y - 3z}{2} \\ \gamma & = & \dfrac{z - 2y + x}{2} \end{array}\right. .$$

Consequentemente,

- $e_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 3u_1 - \dfrac{5}{2}u_2 + \dfrac{1}{2}u_3$;
- $e_2 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = -3u_1 + 4u_2 - u_3$;
- $e_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = u_1 - \dfrac{3}{2}u_2 + \dfrac{1}{2}u_3$.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!