

### 4.3 Aplicações da Integral de Linha em Campos Escalares

#### Massa e Centro de Massa de um fio delgado

Uma das aplicações mais importantes das integrais de linha em campos escalares está relacionada com o *Centro de Massa*. Considere um fio delgado de densidade variável, com a forma de uma curva  $c$  como visto na Figura 4.4.

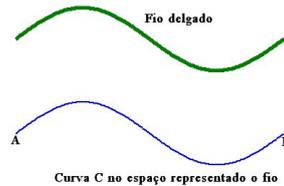


Figura 4.4: Representação de um fio delgado para a interpretação da integral de linha em campos escalares.

Suponha que a densidade de massa  $\rho(x, y, z)$  seja constante sobre qualquer seção transversal de área  $S$ . Então, o fio pode ser identificado com a curva  $c$ . Se o fio é representado pela curva  $c$  e se a densidade num ponto  $(x, y, z)$  é dada por  $\rho(x, y, z)$ , então, cada parte do fio tem massa aproximada dada por  $\rho(Q_i)\Delta S_i$ , onde  $Q_i \in [P_{i-1}, P_i]$  e  $\Delta S_i$  é o comprimento da curva do ponto  $P_{i-1}$  até o ponto  $P_i$ , como visto na Figura 4.5.

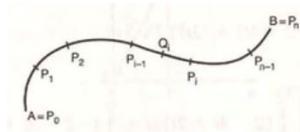


Figura 4.5: Representação de um fio delgado dividido por uma partição  $P_0, P_1, \dots, P_n$ .

Assim, a massa total do fio fica dada por, aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n \rho(Q_i)\Delta S_i.$$

Dessa forma, tomando o máximo do comprimento  $\Delta S_i$  tendendo a zero no cálculo do limite, temos que a *Massa Total* do fio, denotada por  $M$ , fica dada por

$$M = \int_C \rho(x, y, z)dS,$$

Considerando o campo gravitacional da Terra sendo uniforme, temos que o *Centro de Gravidade* e o *Centro de Massa* são coincidentes e, por isso,

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  fica dado por

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x\rho(x, y, z)dS, \\ \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y\rho(x, y, z)dS, \\ \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z\rho(x, y, z)dS, \end{cases} .$$

A hipótese do centro de gravidade ser igual ao centro de massa, se mostraram falhas, em algumas experiências. Contudo, em quase todos os problemas de mecânica essa hipótese é usada. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 4.3.1** Calcule a massa de um fio delgado com a forma de um semicírculo de raio  $a$ , considerando que a densidade em um ponto  $P$  é diretamente proporcional à sua distância à reta que passa pelos pontos extremos.

**Solução:** Considere que o fio delgado esteja como visto na Figura 4.6.

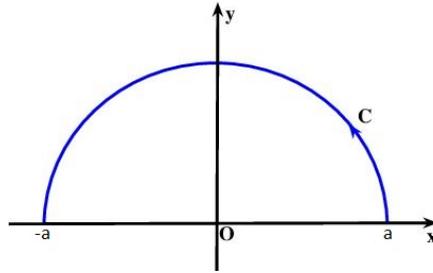


Figura 4.6: Representação do Fio delgado do Exemplo 4.3.1.

Então, uma parametrização para a curva  $c$  fica dada por

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t)), \quad t \in [0, \pi].$$

Como a densidade do fio é diretamente proporcional à sua distância ao eixo  $x$ , temos que  $f(x, y) = ky$ , onde  $k$  é a constante de proporcionalidade. Assim,

$$M = \int_c f(\vec{r}(t))dS = \int_0^\pi k \cdot a\sin(t) \cdot a = 2ka^2.$$

Portanto, a massa do fio fica dada por  $M = 2ka^2$  unidades de massa. ■

**Exemplo 4.3.2** Obtenha a massa da elipse  $c : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , situada no primeiro quadrante, sabendo que a densidade em cada ponto  $(x, y)$  é igual ao produto das coordenadas do ponto.

**Solução:** Para cada ponto  $(x, y)$  da elipse, temos que a densidade  $\rho$  fica dada por  $\rho(x, y) = xy$ . Assim, como uma parametrização para a elipse  $c$  é

dada por  $\vec{r}(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$ , no primeiro quadrante teremos  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

Dessa forma, como  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = (-3\sin(t), 2\cos(t))$ , segue que

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| = \sqrt{9\sin^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{4 + 5\sin^2(t)}.$$

Assim,

$$M = \int_C \rho(\vec{r}(t)) dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos(t) \cdot 2\sin(t) \sqrt{4 + 5\sin^2(t)} dt.$$

Chamando de  $u = 4 + 5\sin^2(t)$ , segue que  $du = 10\sin(t)\cos(t) dt$  e, assim,

$$\begin{aligned} M &= \frac{6}{10} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{u} du = \frac{2}{5} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5} (4 + 5\sin^2(t))^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{2}{5} \left( 9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2 \cdot (27 - 8)}{5} = \frac{38}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a massa da elipse fica dada por  $M = \frac{38}{5}$  unidades de massa. ■

**Exemplo 4.3.3** Calcule as coordenadas do centro de massa de um fio delgado que tem a forma da hélice circular  $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 5t)$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ , sabendo que a densidade  $\rho$  no ponto  $P = (x, y, z)$  é dada por  $\rho(P) = x^2 + y^2 + z^2$ .

**Solução:** O primeiro passo nesse exemplo é calcular a massa do fio. Assim, como

$$\frac{d}{dt}(\vec{r})(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 5),$$

segue que

$$\left\| \frac{d}{dt}(\vec{r})(t) \right\| = \sqrt{4\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 25} = \sqrt{29}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} M &= \int_C (x^2 + y^2 + z^2) dS = \int_0^{2\pi} (4\cos^2(t) + 4\sin^2(t) + 25t^2) \sqrt{29} dt = \\ &= \sqrt{29} \int_0^{2\pi} (4 + 25t^2) dt = \sqrt{29} \left( 4t + \frac{25t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi\sqrt{29}}{3} (3 + 25\pi^2) \text{ u.m..} \end{aligned}$$

Agora, vamos obter o centro de gravidade. Como  $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x f(x, y, z) dS$ , segue que

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} 2\cos(t)(4 + 25t^2) \sqrt{29} dt = \frac{8\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{50\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(t) dt = \frac{8\sqrt{29}}{M} \operatorname{sen}(t) \Big|_0^{2\pi} + \\
& + \frac{50\sqrt{29}}{M} (t^2 \operatorname{sen}(t) + 2t \cos(t) - 2 \operatorname{sen}(t)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{200\pi\sqrt{29}}{M}.
\end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $M$ , chegamos a  $\bar{x} = \frac{75}{3 + 25\pi^2}$ . Para  $\bar{y}$ , temos que  $\bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y f(x, y, z) dS$ , então,

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen}(t) (4 + 25t^2) \sqrt{29} dt = \frac{8\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t) dt + \\
& + \frac{50\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} t^2 \operatorname{sen}(t) dt = \frac{-8\sqrt{29}}{M} \cos(t) \Big|_0^{2\pi} + \\
& + \frac{50\sqrt{29}}{M} (-t^2 \cos(t) + 2t \operatorname{sen}(t) + 2 \cos(t)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{-200\pi^2\sqrt{29}}{M}.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo o valor de  $M$ , chegamos a  $\bar{y} = \frac{-75\pi}{3 + 25\pi^2}$ .

Por fim, como  $\bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) dS$ , temos que

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} 5t(4 + 25t^2) \sqrt{29} dt = \frac{20\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} t dt + \frac{125\sqrt{29}}{M} \int_0^{2\pi} t^2 dt = \\
& = \frac{10\sqrt{29}}{M} t^2 \Big|_0^{2\pi} + \frac{125\sqrt{29}}{3M} t^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{20\pi^2\sqrt{29}}{M} (2 + 25\pi^2).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo o valor de  $M$ , chegamos a  $\bar{z} = \frac{15\pi(2 + 25\pi^2)}{2(3 + 25\pi^2)}$ . Logo, o centro de massa procurado é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left( \frac{75}{3 + 25\pi^2}, \frac{-75\pi}{3 + 25\pi^2}, \frac{15\pi(2 + 25\pi^2)}{2(3 + 25\pi^2)} \right).$$

■

## Momento de Inércia

Outra aplicação para a integral de linha em campos escalares está relacionado com o *Momento de Inércia*. Cada ponto material de um corpo em rotação tem uma quantidade de energia cinética. Um ponto material  $P$ , de massa  $m$ , a uma distância  $r$  do eixo de rotação, tem uma velocidade  $v = \omega r$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular do ponto  $P$ , como visto na Figura 4.7.

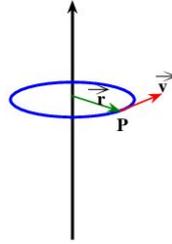


Figura 4.7: Representação da velocidade angular.

A energia cinética de  $P$  é dada por  $\frac{1}{2}mr^2\omega^2$ . Para um corpo composto de massa puntiforme discreta, a energia cinética total fica dada por

$$K = \frac{1}{2} (m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots) \omega^2 \tag{4.1}$$

O somatório que aparece na Equação 4.1 define o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação considerado. Assim, usando a mesma analogia usada para encontrar o centro de massa para um fio delgado de densidade variável  $\rho(x, y, z)$ , concluímos que o momento de inércia do fio em relação a um eixo  $L$  é dado por

$$I_L = \int_c \delta^2(x, y, z)\rho(x, y, z)dS,$$

onde  $\delta$  é a distância do ponto  $(x, y, z)$  de  $c$  ao eixo de rotação  $L$ . Vamos aos exemplos.

**Exemplo 4.3.4** *Um arame tem a forma de um semicírculo de raio 4, conforme Figura 4.8. Determine o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame, se a densidade  $\rho$  do ponto  $(x, y)$  é dada por  $\rho(x, y) = x + y$ .*

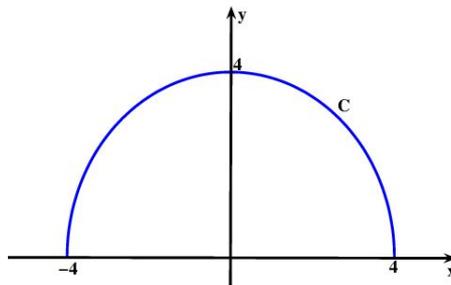


Figura 4.8: Arame delgado do Exemplo 4.3.4.

**Solução:** Observe que a curva é um semicírculo centrado na origem e de raio 4. Assim, considere a parametrização para  $c$ , dada por

$$\vec{r}(t) = (4\cos(t), 4\sen(t)), \text{ com } t \in [0, \pi].$$

A distância de qualquer ponto  $P(x, y)$  a reta que passa pelos extremos é dada por  $\rho(x, y, z) = y$ . Assim,

$$I_L = \int_c y^2(x + y)dS = \int_0^\pi 16\sen^2(t)(4\cos(t) + 4\sen(t))4dt =$$

$$= 256 \int_0^\pi [\text{sen}^2(t)\cos(t) + \text{sen}^3(t)]dt = 256 \left( \frac{\text{sen}^3(t)}{3} + \frac{\cos^3(t)}{3} - \cos(t) \right),$$

ou seja,  $I_L = \frac{1024}{3}$  unidades de momento de inércia. ■

**Exemplo 4.3.5** *Mostre que o momento de inércia de um fio homogêneo com a forma de uma circunferência de raio  $r$  em torno de um diâmetro é igual a  $\frac{mr^2}{2}$ , onde  $m$  é a massa do fio.*

**Solução:** Vamos considerar a curva  $c$  é dada pela circunferência de raio  $r$  centrada na origem, como visto na Figura 4.9.

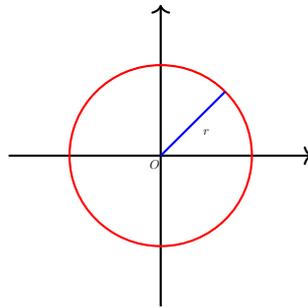


Figura 4.9: Ilustração do círculo do Exemplo 4.3.5.

Temos que uma parametrização para a curva  $c$  é dada por  $\vec{a}(t) = (r\cos(t), r\text{sen}(t))$ , com  $t \in [0, 2\pi]$ . Como o fio é homogêneo, temos que a sua densidade é constante, ou seja,  $\rho(x, y) = k \in \mathbb{R}$ , para todo  $(x, y) \in c$ .

Assim, como  $m = \rho(x, y) \cdot \text{comprimento}$ , segue que  $m = 2\pi kr$ . Assim, considerando o diâmetro utilizado como eixo de rotação  $L$  sobre o eixo  $x$ , temos que a distância de todos os pontos de  $c$  a  $L$  fica dado por  $\delta(x, y) = y^2$ . Assim,

$$I_L = \int_c y^2 k dS = k \int_c y^2 dS.$$

Como  $\frac{d\vec{a}}{dt}(t) = (-r\text{sen}(t), r\cos(t))$ , segue que

$$\left\| \frac{d\vec{a}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{r^2\text{sen}^2(t) + r^2\cos^2(t)} = r.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} I_L &= k \int_0^{2\pi} r^2 \text{sen}^2(t) r dt = kr^3 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t) dt = kr^3 \left( t - \frac{\text{sen}(2t)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= k\pi r^3 = 2k\pi r \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{mr^2}{2}. \end{aligned}$$

■

## Lei de Biot-Savart

Uma carga puntiforme positiva  $q$ , movendo-se com uma velocidade  $\vec{v}$ , gera um campo magnético  $B_q$  cuja intensidade num ponto qualquer  $P$  é dado por

$$B_q = \frac{kqv \text{sen}(\theta)}{r^2},$$

onde  $k$  é uma constante,  $r$  é a distância de  $P$  a  $q$  e  $\theta$  é o ângulo formado entre os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ , como visto na Figura 4.10.

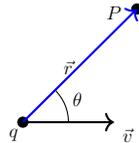


Figura 4.10: Ilustração da motivação da Lei de Biot-Savart.

Suponha que uma corrente elétrica de intensidade  $i$  circula um condutor com a forma de uma curva  $c$ , como ilustrado na Figura 4.11.

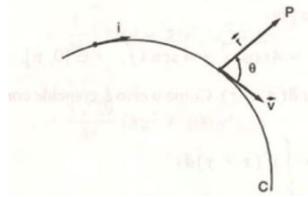


Figura 4.11: Ilustração da corrente  $i$  circulando um condutor com a forma de  $c$ .

Vamos obter a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$ , num ponto qualquer  $P$ , produzido por todas as cargas em movimento no circuito. Para isso, divida o condutor em pequenos elementos de comprimento  $dS_i$ . Assim, o volume de cada elemento é dado por  $AdS_i$ , onde  $A$  é a área da seção vertical reta. Se existem  $n$  portadores de carga por unidade de volume, cada um desses com uma carga  $q$ , temos que a carga total  $dQ$  em movimento no elemento, fica dada por

$$dQ = nqAdS_i.$$

O conjunto de carga em movimento no elemento é equivalente a uma única carga  $dQ$ , movendo-se com velocidade  $\vec{v}$ . Conseqüentemente, num ponto qualquer  $P$ , o campo magnético  $d\vec{B}$  produzido por essas cargas tem intensidade  $dB$  dada por

$$dB = \frac{k dQ v \text{sen}(\theta)}{r^2} = k \frac{nqAdS_i v \text{sen}(\theta)}{r^2}.$$

Como  $i = nqvA$  é a intensidade  $i$  da corrente do elemento, temos que

$$dB = k \frac{i \text{sen}(\theta)}{r^2} dS_i. \quad (4.2)$$

A Equação 4.2 é chamada de *Lei de Biot-Savart*. Ela nos dá a intensidade do campo magnético  $d\vec{B}$ , num ponto qualquer  $P$ , produzido pelo conjunto de cargas em movimento no elemento  $dS_i$ . Fazendo o máximo dos  $dS_i$  ir para zero e calculando o limite, temos que a intensidade num ponto qualquer  $P$  do campo magnético resultante  $\vec{B}$ , devido ao circuito completo fica dado por

$$B = k \int_c \frac{i \text{sen}(\theta)}{r^2} dS.$$

Vamos aos exemplos.

**Exemplo 4.3.6** *Seja um condutor da forma de uma espira circular de raio 2, percorrido por uma corrente de intensidade  $i$ , como visto na Figura 4.12.*

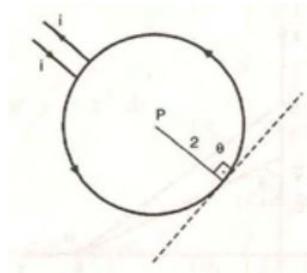


Figura 4.12: Ilustração do condutor usado no Exemplo 4.3.6.

*Encontre a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  no centro da espira.*

**Solução:** Observe que a distância de qualquer carga ao centro é constante e igual ao raio, ou seja,  $r = 2$ . Além disso, o ângulo entre o vetor posição e o vetor velocidade também é constante e igual a  $\frac{\pi}{2}$ . Dessa forma, temos que

$$B = k \int_c \frac{i}{4} dS.$$

Como  $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\text{sen}(t))$ , segue que

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \sqrt{4\text{sen}^2(t) + 4\cos^2(t)} = 4.$$

Conseqüentemente,

$$B = k \int_0^{2\pi} \frac{i}{4} 2 dt = k\pi i \text{ u.c.m..}$$

■

**Exemplo 4.3.7** *Seja um condutor da forma de um triângulo retângulo de lados medindo 3, 4 e 5. Uma corrente de intensidade  $i$  circula o condutor. Encontre a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  no vértice de menor ângulo.*

**Solução:** Na Figura 4.13 há a ilustração do condutor.

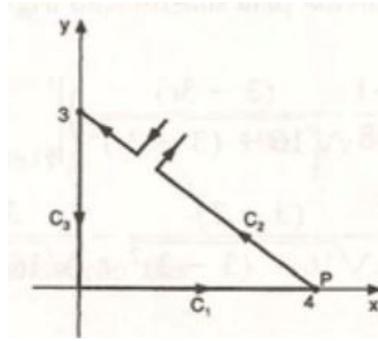


Figura 4.13: Ilustração do condutor usado no Exemplo 4.3.7.

Observe que ele é formado por três segmentos de reta, denotados por  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ . Dessa forma, temos que o campo magnético  $\vec{B}$  no ponto  $P$  fica dada por

$$B = k \int_{c_1} \frac{isen(\theta)}{r^2} dS + k \int_{c_2} \frac{isen(\theta)}{r^2} dS + k \int_{c_3} \frac{isen(\theta)}{r^2} dS.$$

Lembre-se que o menor ângulo está oposto ao menor lado e, por isso, temos que o ponto  $P$  está posicionado sobre o ponto  $(4, 0)$ . Para  $c_1$ , temos que  $\vec{r}_1(t) = (4t, 0)$ , com  $0 \leq t \leq 1$  e  $\theta = \angle(\vec{r}_1, \vec{v}) = 0$ . Assim, como  $\frac{d\vec{r}_1}{dt} = (4, 0)$  e, conseqüentemente temos que  $\left\| \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \sqrt{4^2 + 0^2} \right\| = 4$ . Assim, segue que

$$k \int_{c_2} \frac{isen(\theta)}{r^2} dS = ki \int_0^1 \frac{0}{(4-4t)^2} 4dt = 0.$$

Por outro lado, para  $c_2$ , temos que  $\vec{r}_2(t) = (4-4t, 3t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$  e  $\theta = \angle(\vec{r}_2, \vec{v}) = 0$ . Assim, como  $\frac{d\vec{r}_2}{dt} = (-4, 3)$  e, conseqüentemente temos que  $\left\| \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} \right\| = 5$ . Daí, segue que

$$k \int_{c_2} \frac{isen(\theta)}{r^2} dS = ki \int_0^1 \frac{0}{(4-4t)^2 + (3t)^2} 5dt = 0.$$

Por fim, observe que em  $c_3$ , o ponto de partida de  $\vec{r}$  é  $(4, 0)$  e o ponto de chegada de  $\vec{r}$  é  $(0, 3-3t)$ , com  $0 \leq t \leq 1$ . Assim, temos que  $\vec{r}_3(t) = (4, 3-3t)$ . Logo,

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{4^2 + (3-3t)^2}.$$

Além disso, sendo  $\theta = \angle(\vec{r}_3, \vec{v})$ , como visto na Figura 4.14

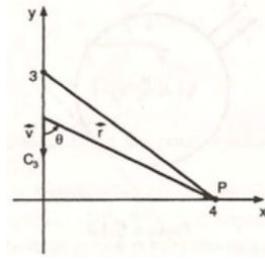


Figura 4.14: Ilustração da posição do ângulo  $\theta$  usado no Exemplo 4.3.7.

segue que  $\text{sen}(\theta) = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (3-3t)^2}}$ . Além disso, temos que  $\frac{d\vec{r}_3}{dt} = (0, -3)$  e, conseqüentemente temos que  $\left\| \frac{d\vec{r}_3}{dt} \right\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$ . Dessa forma, chamando  $3 - 3t$  de  $4\tan(\phi)$ , temos que

$$\begin{aligned} k \int_{c_3} \frac{i \text{sen}(\theta)}{r^2} dS &= 4ki \int_0^1 \frac{\frac{4}{\sqrt{4^2 + (3-3t)^2}}}{4^2 + (3-3t)^2} 3dt = 12ki \int_0^1 (16 + (3-3t)^2)^{-3/2} dt \\ &= 12ki \left( \frac{-1}{48} \frac{(3-3t)}{\sqrt{16 + (3-3t)^2}} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3ki}{20}. \end{aligned}$$

Portanto,  $B = 0 + 0 + \frac{3ki}{20} = \frac{3ki}{20}$  unidades de campo magnético. ■

Agora faça alguns exercícios. Bons estudos.

## 4.4 Exercícios

**Exercício 4.4.1** Um fio delgado é preso em dois suportes de mesma altura, tomando a forma da catenária  $y = \cosh(x)$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ . Supondo que a densidade do fio é a mesma em todos os pontos, calcule a massa do fio.

**Exercício 4.4.2** Dado um arame semicircular uniforme de raio 4cm, mostre que o centro de massa do fio está situado no eixo de simetria a uma distância de  $\frac{8}{\pi}$  cm do centro e mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é  $8M$ , onde  $M$  é a massa do arame.

**Exercício 4.4.3** Determine a massa de um fio anel circular de raio 2cm, sabendo que a sua densidade é constante.

**Exercício 4.4.4** Calcule o centro de massa de uma arame com a forma de um quadrado de vértices  $(0, -1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2, 1)$  e  $(0, 1)$  sabendo que a densidade no ponto  $(x, y)$  é proporcional ao quadrado da distância desse ponto até a origem.

**Exercício 4.4.5** Um arame tem a forma da curva obtida pela interseção da semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $y \geq 0$ , com o plano  $x + z = 2$ . Sabendo que a densidade em cada ponto do arame é dada por  $\rho(x, y, z) = xy$ , calcule a massa total do arame.

**Exercício 4.4.6** Calcule a massa e o centro de massa do arame cuja forma é dada pela curva de interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2y$ , situada no primeiro octante, com o plano  $z = y$ , supondo que a densidade em um ponto  $P$  é proporcional ao quadrado da distância de  $P$  à origem.

**Exercício 4.4.7** Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , compreendida entre os planos  $z = 0$  e  $x + y + z = 2$ , com  $z \geq 0$ . Se o metro quadrado do zinco custa  $M$  reais, calcule o preço total da peça.

**Exercício 4.4.8** Calcule o centro de massa de um fio homogêneo que tem a forma da curva  $\gamma(t) = \left( t, \frac{2\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}, \frac{t^4}{4} \right)$ , com  $0 \leq t \leq 2$ , sabendo que a densidade é dada por  $\rho(x, y, z) = 10x$ .

**Exercício 4.4.9** Um arame tem a forma da curva obtida como interseção da semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $x \geq 0$ , com o plano  $y + z = 4$ , sabendo que a densidade em cada ponto  $(x, y, z)$  é dada por  $\rho(x, y, z) = x$ . Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo  $x$  é igual a  $\frac{32}{3}m$ , onde  $m$  é a massa do arame.

**Exercício 4.4.10** Uma espira quadrada de lado  $a$  conduz uma corrente  $i$ . Mostre que a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$  no seu centro é dada por

$$B = \frac{8\sqrt{2}ki}{a} \text{ unidades de campo magnético.}$$