

3.21 Concavidade e Ponto de Inflexão

Desde as séries iniciais escutamos sobre a *Concavidade* de uma parábola, mas nunca nos foi apresentado uma definição formal sobre este conceito. A seguir é apresentada a definição formal de concavidade, que está relacionada com a posição que a curva ocupa no espaço em relação a suas retas tangentes.

Definição 3.21.1 Dizemos que o gráfico de uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **Côncavo para Cima** no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existe e se houver um intervalo $I \subset X$ contendo o ponto c tal que $\forall x \in I$, com $x \neq c$, o ponto $(x, f(x)) \in Gr_f$ está acima da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, f(c))$.

■

Definição 3.21.2 Dizemos que o gráfico de uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **Côncavo para Baixo** no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existe e se houver um intervalo $I \subset X$ contendo o ponto c tal que $\forall x \in I$, com $x \neq c$, o ponto $(x, f(x)) \in Gr_f$ está abaixo da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(c, f(c))$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.21.1 Considere a função $f(x) = x^2 - 4$. Observe o Gr_f , dado pela Figura 3.29. Temos que todos os pontos do gráfico estão acima da reta tangente e, por isto, podemos concluir que a função f é côncava para cima.

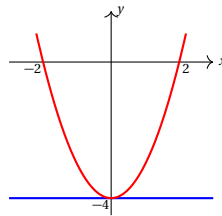


Figura 3.29: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$.

■

Exemplo 3.21.2 Considere a função $g(x) = -x^2 - 5x - 6$. Observe o Gr_g , dado pela Figura 3.30. Temos que todos os pontos do gráfico estão abaixo da reta tangente e, por isto, podemos concluir que a função g é côncava para baixo.

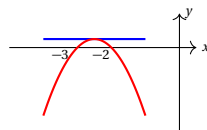


Figura 3.30: Esboço do gráfico da função $g(x) = -x^2 - 5x - 6$.

■

Quando estudamos a parábola nas séries iniciais, bastava observar o sinal no número que está multiplicando o termo de grau dois na equação para saber sobre a concavidade. Para uma curva qualquer, não é possível associar a concavidade com um coeficiente. Para curvas em geral, o próximo resultado vai relacionar a concavidade da função com a segunda derivada.

Teorema 3.21.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em algum intervalo aberto $I \subset X$, com $c \in I$. Então,*

a) *se $f''(x) > 0, \forall x \in I$, segue que o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$.*

b) *se $f''(x) < 0, \forall x \in I$, segue que o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.*

Demonstração: Ver referências. ■

Para a função quadrática, o que ocorre é o seguinte: sabendo que

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 2a \Rightarrow \begin{cases} f''(x) > 0, & \text{se } a > 0 \\ f''(x) < 0, & \text{se } a < 0 \end{cases}.$$

Logo, a concavidade estudada nas séries básicas não precisa ser definida em função da segunda derivada, mas apenas em relação ao sinal do coeficiente de x^2 .

Será que a recíproca do Teorema 3.21.1 é verdadeira? Ou seja, será que se uma função é côncava para cima a sua derivada é positiva? A resposta é não. Para exemplificar, considere a função $f(x) = x^6 + 1$ e o seu esboço do Gr_f dado pela Figura 3.31.

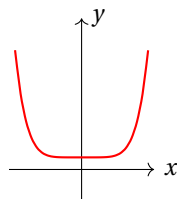


Figura 3.31: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^6 + 1$.

Como $f''(x) = 30x^4$ segue que $f''(0) = 0$, mas f é côncava para cima em $(0, f(0))$. Ou seja, uma função pode ser côncava para cima ou para baixo num ponto e a sua segunda derivada no ponto pode ser zero.

Observação 3.21.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se existir no Gr_f um ponto no qual o sentido de concavidade muda, então, existindo ali uma reta tangente, temos que o gráfico da função cruzará a sua reta tangente nesse ponto. Como visto na Figura 3.32.*

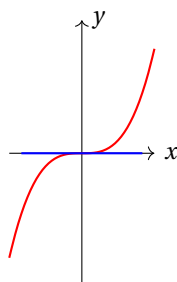


Figura 3.32: Esboço do gráfico de uma função f que apresenta mudança de concavidade no ponto $x = 0$.

■

O ponto onde o gráfico de uma função inverte a concavidade é importante, como visto na definição a seguir.

Definição 3.21.3 Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. O ponto $(c, f(c)) \in Gr_f$ é chamado de **Ponto de Inflexão do Gráfico da função** f , se o Gr_f tiver em c uma reta tangente e se existir um intervalo aberto $I \subset X$ contendo c tal que, para $x \in I$ temos:

- a) $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou
 b) $f''(x) > 0$ se $x < c$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

■

Em outras palavras: um ponto c é o ponto de inflexão do Gr_f se a reta tangente existe em c e se a segunda derivada de f muda de sinal em torno de c . Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.21.3 Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{se } x < 1 \\ 2 + x^2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.
 A função h , possui pontos de inflexão? Por que?

Solução: Veja que

$$h'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{se } x < 1 \\ \nexists, & \text{se } x = 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ e, conseqüentemente, } h''(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x < 1 \\ \nexists, & \text{se } x = 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Assim, temos que a segunda derivada da função h muda de sinal em $x = 1$. Contudo, esse ponto não é um ponto de inflexão, visto que não existe reta tangente em $x = 1$, já que $f'_+(1) = 2$ e $f'_-(1) = -2$. Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.33.

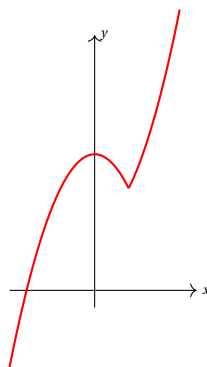


Figura 3.33: Esboço do gráfico da função $h(x)$ do Exemplo 3.21.3.

■

Exemplo 3.21.4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(t) = 21t + 9t^2 - 3t^3$. Encontre os pontos de inflexão da função f , se existirem.

Solução: Temos que $f'(t) = 21 + 18t - 9t^2$ e, conseqüentemente $f''(t) = 18 - 18t$. Fazendo um estudo do sinal da segunda derivada de f , temos que $f''(t) > 0$ se $x < 1$ e $f''(t) < 0$ se $x > 1$. Logo, como existe a reta tangente da função em todos os pontos da reta, segue que o ponto $t = 1$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Um esboço ao gráfico de f é dada pela Figura 3.34.

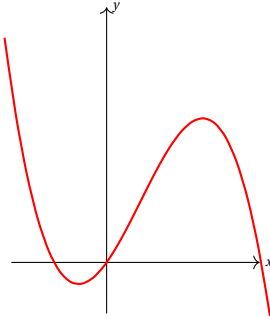


Figura 3.34: Esboço do gráfico da função $f(t)$ do Exemplo 3.21.4.

■

Quais e quantos são os pontos de inflexão do gráfico de uma função? O resultado a seguir vai apresentar quem são os possíveis candidatos a ponto de inflexão de uma função.

Teorema 3.21.2 *Se a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em algum intervalo aberto $I \subset X$ contendo c e se $(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f em I , então, temos que se $f''(c)$ existe, segue que $f''(c) = 0$.*

Demonstração: Ver referências.

■

Portanto, os candidatos a ponto de inflexão são os pontos onde a segunda derivada não existe ou onde a segunda derivada da função é nula. Fora esses pontos não temos outros candidatos a pontos de inflexão. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3.21.5 *Encontre, se existir, os pontos de inflexão da função $f(x) = x^4$.*

Solução: Temos que os candidatos a ponto de inflexão são os pontos onde $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Observe que $f'(x) = 4x^3$ e, por isso, $f''(x) = 12x^2$. Assim, temos que f'' existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Logo, o candidato a ponto de inflexão é o ponto $x = 0$. Como $f'' > 0 \forall x \neq 0$, segue que $x = 0$ não é um ponto de inflexão do gráfico de f . Portanto, Gr_f não possui ponto de inflexão. Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.35.

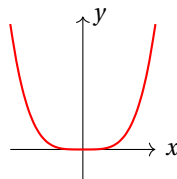


Figura 3.35: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^4$ do Exemplo 3.21.5.

■

Exemplo 3.21.6 Encontre, se existir, os pontos de inflexão da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

Solução: Temos que os candidatos a ponto de inflexão são os pontos onde $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ e, conseqüentemente, $f''(x) = 6x - 12$, segue que $f''(x)$ existe para todo número real e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Assim, o candidato a ponto de inflexão é o ponto $x = 2$. A reta tangente ao gráfico de f existe em $x = 2$ e, além disso, como $f'' > 0$ se $x > 2$ e $f''(x) < 0$ se $x < 2$, segue que $x = 2$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.36.

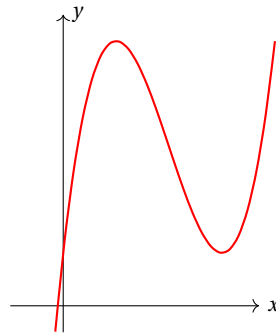


Figura 3.36: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ do Exemplo 3.21.6.

■

Exemplo 3.21.7 Encontre, se existir, os pontos de inflexão da função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

Solução: Temos que os candidatos a ponto de inflexão são os pontos onde $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Como

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}},$$

segue que $f''(x)$ não existe para $x = 0$ e $f''(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Como existe a reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ (a reta tangente é vertical), segue que o candidato a ponto de inflexão é o ponto $x = 0$. Assim, tendo $f'' > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > 0$, segue que $x = 0$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.37.

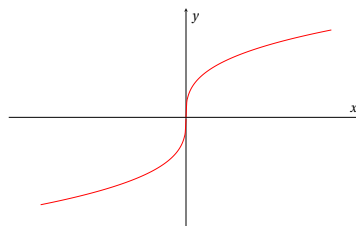


Figura 3.37: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ do Exemplo 3.21.7.

■

Exemplo 3.21.8 Encontre, se existir, os pontos de inflexão da função $f(x) = (1-2x)^3$.

Solução: Temos que os candidatos a ponto de inflexão da função f são os pontos onde $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Como $f'(x) = 3(1-2x)^2 \cdot (1-2x)' = -6(1-2x)^2$ e, conseqüentemente, $f''(x) = -12(1-2x)^1 \cdot (1-2x)' = 24(1-2x)$, segue que $f''(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24(1-2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Assim, o candidato a ponto de inflexão é o ponto $x = \frac{1}{2}$.

Como $f'' > 0$ se $x < \frac{1}{2}$ e $f''(x) < 0$ se $x > \frac{1}{2}$, segue que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de inflexão do gráfico de f . Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.38.

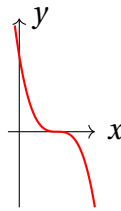


Figura 3.38: Esboço do gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 3.21.8.

■

Exemplo 3.21.9 Encontre, se existir, os pontos de inflexão da função $f(x) = \sin(x)$.

Solução: Temos que os candidatos a ponto de inflexão são os pontos onde $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não existe. Como $f'(x) = \cos(x)$ e, conseqüentemente, $f''(x) = -\sin(x)$, segue que $f''(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Daí, os candidatos a ponto de inflexão são os pontos da forma $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como os pontos da forma $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são limites entre o 1° e o 4° quadrantes ou entre o 2° e o 3° quadrantes, segue que a segunda derivada da função inverte o sinal para pontos antes de $x = k\pi$ e depois de $x = k\pi$. Portanto, os pontos da forma $x = k\pi$ são os pontos de inflexão do gráfico de f . Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 3.39.

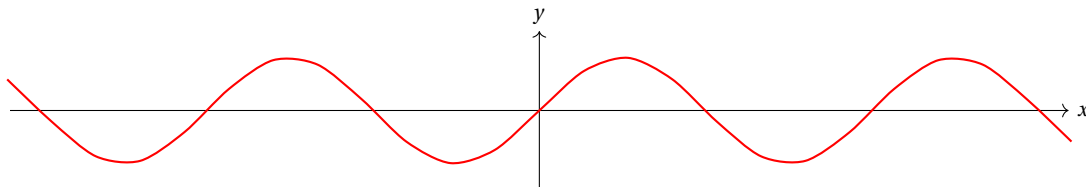


Figura 3.39: Esboço do gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 3.21.9.

■

Até aqui já foram apresentados quase todos os conceitos necessários para fazermos o esboço do gráfico de qualquer função. Já sabemos encontrar as raízes da

função (em alguns casos), as assíntotas horizontais e verticais do gráfico, fazer um estudo do crescimento e da concavidade, encontrar os pontos de extremos relativos e os pontos onde o gráfico muda de concavidade. Agora é apresentado um caso raro, mas importante, que é quando aparecem as *Assíntotas Oblíquas*. Depois disso, podemos fazer o esboço do gráfico de qualquer função.

Definição 3.21.4 Seja $h : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função racional da forma $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, de forma que $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam polinômios e o grau de f seja uma unidade maior do que o grau de g . Assim, temos que $h(x) = \frac{r(t)}{g(x)} + mx + t$, como o grau de r menor do que o grau de g . Então, a reta $r : mx + t$ é a **Assíntota Oblíqua** do gráfico de h . ■

Portanto, para aparecer uma assíntota oblíqua temos que ter uma função racional com o grau do polinômio do numerador sendo uma unidade maior do que o grau do denominador. Dividindo o denominador pelo numerador aparece uma função afim, que vai ser a nossa assíntota oblíqua. Vejamos os exemplo.

Exemplo 3.21.10 Encontre, se existir, as assíntotas do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ e faça um esboço do Gr_f .

Solução: Temos que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f , visto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Além disso, temos que Gr_f não possui assíntotas horizontais, visto que

$$\left| \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \right| = +\infty.$$

Por fim, como $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$, segue que a reta $r : x + 1$ é uma assíntota oblíqua. A Figura 3.40 apresenta um esboço do gráfico de f .

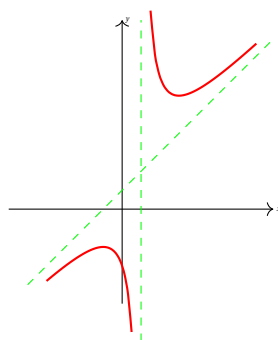


Figura 3.40: Esboço do gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 3.21.10. ■

Exemplo 3.21.11 Encontre, se existir, as assíntotas do gráfico da função $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ e faça um esboço do Gr_g .

Solução: Temos que a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g , visto que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty.$$

Além disso, temos que g não possui assíntotas horizontais, visto que

$$\left| \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \right| = \left| \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right| = +\infty.$$

Por fim, como $g(x) = x + 2 - \frac{7}{x-2}$, segue que a reta $r : x + 2$ é uma assíntota oblíqua. A Figura 3.41 apresenta um esboço do gráfico de g .

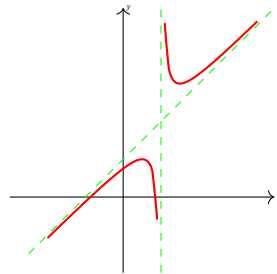


Figura 3.41: Esboço do gráfico da função $g(x)$ do Exemplo 3.21.11.

■

Usando todas as informações construídas até aqui, já podemos fazer o esboço do gráfico de qualquer função de maneira precisa. A seguir é apresentado um procedimento que sintetiza todos os conhecimentos e que vai ajudar a fazer alguns esboços de gráficos de funções.

Observação 3.21.2 *Construindo o esboço do gráfico de uma função f :*

- 1° - Determine o domínio da função f .
- 2° - Encontre as raízes da função f , quando possível, ou seja, encontre os pontos onde $f(x) = 0$.
- 3° - Encontre o ponto de intersecção do Gr_f com o eixo das ordenadas $((0, f(0)))$.
- 4° - Encontre as assíntotas ao gráfico da função f (vertical, horizontal e oblíqua).
- 5° - Calcule f' e f'' , encontrando os pontos críticos e os candidatos a ponto de inflexão ao Gr_f e faça um estudo do crescimento e da concavidade do Gr_f .

■

Com esse procedimento, podemos construir o esboço do gráfico de qualquer função de uma maneira precisa. Agora, vamos aos exemplos.

Exemplo 3.21.12 Faça o esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, de uma maneira precisa.

Solução: Temos que $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ e $f''(x) = 6x - 6$. Assim, f' e f'' existem para todos os números reais, pois ambos são polinômios. Além disso, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Portanto, os pontos críticos de f são os pontos $x = 0$ e $x = 2$ e o candidato a ponto de inflexão é o ponto $x = 1$. O estudo de sinal da derivada é dada pela Figura 3.42.

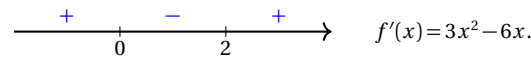


Figura 3.42: Estudo do sinal da derivada da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Por outro lado, o estudo de sinal da segunda derivada é dada pela Figura 3.43.

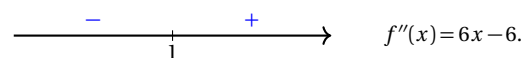


Figura 3.43: Estudo do sinal da segunda derivada da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Observe que f não possui assíntotas verticais e oblíquas, visto que f é um polinômio. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e, por isso, f não possui assíntotas horizontais. A Tabela 3.6 sintetiza todas as informações sobre f , f' e f'' .

x	f	f'	f''	Crescimento	Concavidade	Conclusão
$x < 0$		+	-	Crescente	P/ Baixo	
$x = 0$	3	0				máximo local
$0 < x < 1$		-	-	Decrescente	P/ Baixo	
$x = 1$	1		0			ponto de inflexão
$1 < x < 2$		-	+	Decrescente	P/ Cima	
$x = 2$	-1	0				mínimo local
$x > 2$		+	+	Crescente	P/ Cima	

Tabela 3.6: Estudo da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Com isso, temos que o Esboço do gráfico da função f fica dado pela Figura 3.44.

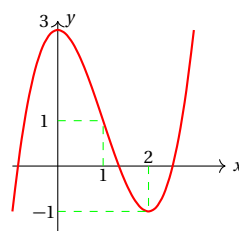


Figura 3.44: Esboço do gráfico da função $f(x)$ do Exemplo 3.21.12.

■

Exemplo 3.21.13 Faça o esboço do gráfico da função $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$, de uma maneira precisa.

Solução: Temos que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $g'(x) = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$ e $g''(x) = \frac{8(3x^4 - 8x^2 - 16)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(x^2 - 4)\left(x^2 + \frac{8}{3}\right)}{(x^2 - 4)^4} = \frac{x^2 + \frac{8}{3}}{(x^2 - 4)^3}$. Assim, temos que g' e g'' existem para todos os números reais diferente de ± 2 , $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $g''(x) \neq 0, \forall x \in D_g$. Portanto, o ponto crítico é o ponto $x = 0$ e g não tem candidatos a ponto de inflexão. Temos que o estudo de sinal da derivada é dada pela Figura 3.45.

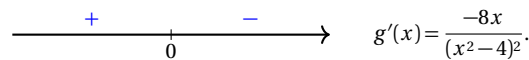


Figura 3.45: Estudo do sinal da derivada da função $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

Por outro lado, o estudo de sinal da segunda derivada é dada pela Figura 3.46.

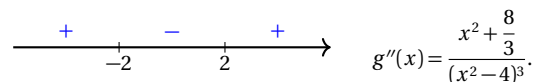


Figura 3.46: Estudo do sinal da segunda derivada da função $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty \end{aligned},$$

segue que as retas $x = -2$ e $x = 2$ são assíntotas verticais ao gráfico de g .

Por outro lado, como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$, segue que

$y = 1$ é a assíntota horizontal do gráfico de g . Temos que g não possui assíntotas oblíquas, visto que o numerador e o denominador são polinômios de mesmo grau. Na Tabela 3.7 temos um compilado das informações obtidas para a função.

x	g	g'	g''	Crescimento	Concavidade	Conclusão
$x < -2$		+	+	Crescente	P/ Cima	
$-2 < x < 0$		+	-	Crescente	P/ Baixo	
$x = 0$	0	0				máximo local
$0 < x < 2$		-	-	Decrescente	P/ Baixo	
$x > 2$		-	+	Decrescente	P/ Cima	

Tabela 3.7: Estudo da função $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

Portanto, temos que o Esboço do gráfico da função g fica dado pela Figura 3.47.

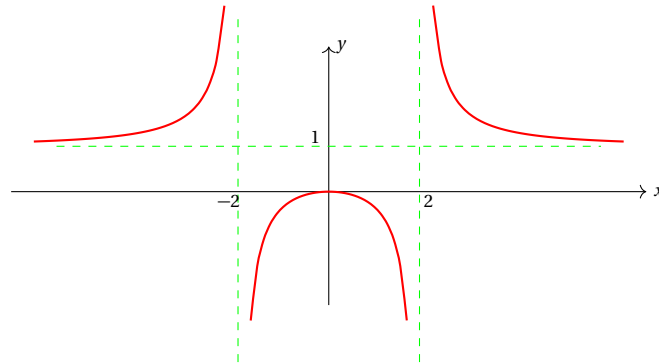


Figura 3.47: Esboço do gráfico da função $g(x)$ do Exemplo 3.21.13.

■

Exemplo 3.21.14 Faça o esboço do gráfico da função $h(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$, de uma maneira precisa.

Solução: Temos que $D_h = \mathbb{R}$, $h'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5(2-x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$ e, por isso, $h''(x) = \frac{-10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9}\left(\frac{1+x}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$. Assim, h' e h'' existem para todos os números reais diferente de zero, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$ e $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 1+x = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Portanto, os pontos críticos do gráfico de h são os pontos $x = 0$ e $x = 2$ e os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $x = -1$ e $x = 0$. Um estudo de sinal da derivada é dada pela Figura 3.48.

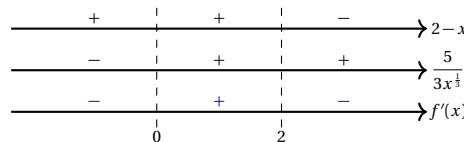


Figura 3.48: Estudo do sinal da primeira derivada da função $h(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

O estudo de sinal da segunda derivada é dada pela Figura 3.49.

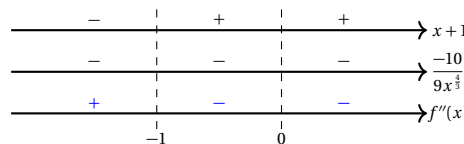


Figura 3.49: Estudo do sinal da segunda derivada da função $h(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

Observe que h não possui assíntotas verticais e oblíquas. Além disso,

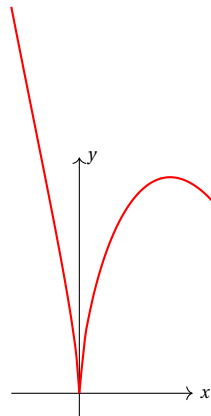
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

e, por isso, h não possui assíntotas horizontais. Fazendo um estudo do sinal de h' e h'' chegamos a Tabela 3.8.

x	h	h'	h''	Crescimento	Concavidade	Conclusão
$x < -1$		$-$	$+$	Decrescente	P/ Cima	
$x = -1$	6		0			Ponto de inflexão
$-1 < x < 0$		$-$	$-$	Decrescente	P/ Baixo	
$x = 0$	0	$\nexists$	$\nexists$			Mínimo Local
$0 < x < 2$		$+$	$-$	Crescente	P/ Baixo	
$x = 2$	$3\sqrt[3]{4}$	0				Máximo Local
$x > 2$		$-$	$-$	Decrescente	P/ Baixo	

Tabela 3.8: Estudo da função $h(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

Temos que o ponto $x = 0$ não é um ponto de inflexão, pois não existe reta tangente nesse ponto. Com isso, temos que o esboço do gráfico da função h fica dado pela Figura 3.50.

Figura 3.50: Esboço do gráfico da função $h(x)$ do Exemplo 3.21.14.

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.....

3.22 Exercício

Exercício 3.22.1 Encontre as assíntotas do gráfico de cada uma das funções a seguir, quando existir. Encontre também os pontos críticos e os pontos de inflexão das funções, caso existam. Faça um estudo do crescimento e da concavidade de todos os pontos da função e faça o esboço do gráfico.

- a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$; f) $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$; j) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^3}$;
b) $f(x) = x^4 - 2x^3$; g) $f(x) = \frac{x}{x-1}$;
c) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$; h) $f(x) = \frac{x-8}{x-3}$; k) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$;
d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$;
e) $f(x) = 3x^5 - 5x^4$; i) $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2}$; l) $f(x) = \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 3x^2 + 1$;

$$m) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \quad n) f(x) = \frac{x^2 - 8}{x - 3}; \quad o) f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 3};$$

$$p) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}; \quad s) f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x), & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases};$$

$$q) f(x) = \begin{cases} -x^4, & \text{se } x < 0 \\ x^4, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}; \quad t) f(x) = 3 \cos(2x), x \in [-\pi, \pi];$$

$$r) f(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2, & \text{se } x \leq 2 \\ (2-x)^3, & \text{se } x > 2 \end{cases}; \quad u) f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \in (-\pi, \pi);$$

$$v) f(x) = \text{sen}(x) + \cos(x), x \in [-2\pi, 2\pi].$$