2.11 Continuidade das Funções Trigonométricas e o Teorema do Confronto

Agora vamos apresentar um resultado que vai auxiliar muito no cálculo de limites de funções. Este teorema é conhecido como *Teorema do Confronto*, e seu enunciado é apresentado a seguir.

Teorema 2.11.1 *(Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche) Suponha que as funções $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estejam definidas em algum intervalo $I \subset X$ contendo a, exceto possivelmente no próprio a, e que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in I \setminus \{a\}$. Suponha também que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$. Então, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.*

Demonstração: Você pode encontrar esta demonstração em algumas das Bibliografias como, por exemplo, no livro do Leithold. ■

Vejamos algumas aplicações do Teorema do Confronto em exemplos, isso vai auxiliar na fixação dos conhecimentos.

Exemplo 2.11.1 *Calcule o valor do limite* $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solução: Não é possível obter o valor do limite da função por manipulações algébricas e nem por substituição direta. Logo, é preciso usar outra estratégia. Lembre-se que $|\operatorname{sen}(\alpha)| \leq 1$, para todo α e, por isso, $|x|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.1$, para todo $x \neq 0$. Assim,

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, segue que

$$0 = \lim_{x\to 0} -|x| \leq \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

■

Exemplo 2.11.2 *Dada que* $|g(x) - 2| \leq 3(x-1)^2$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, *encontre* $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

Solução: Temos que:

$$|g(x) - 2| \leq 3(x-1)^2 \Rightarrow -3(x-1)^2 \leq g(x) - 2 \leq 3(x-1)^2.$$

Então, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to 1}[-3(x-1)^2 + 2] \leq \lim_{x\to 1} g(x) \leq \lim_{x\to 1}[3(x-1)^2 + 2] \Rightarrow 2 \leq \lim_{x\to 1} g(x) \leq 2.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$. ■

A observação a seguir vai estabelecer a continuidade das funções trigonométricas em todos os pontos do seu domínio, informação esta que será usada com bastante frequência.

Observação 2.11.1 *Seja a um elemento do domínio da função trigonométrica. Assim, temos que:*

a) $\lim\limits_{x\to a} \text{sen}(x) = \text{sen}(a)$;

b) $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \cot(x) = \cot(a)$;

e) $\lim\limits_{x\to a} \sec(x) = \sec(a)$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \csc(x) = \csc(a)$.

Portanto, temos que todas as funções trigonométricas são contínuas em todos os pontos do seu domínio.

■

Exemplo 2.11.3 *Calcule o valor de* $\lim\limits_{x\to 2} \cos\left(\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}\right)$.

Solução: Como a função cosseno é contínua em todo o seu domínio, segue que

$$\lim_{x\to 2}\cos\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}\right) =$$

$$= \cos\left(\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}\right) = \cos\left(\frac{0}{4}\right) = \cos(0) = 1.$$

■

O cálculo de alguns limites não são tão simples de ser obtidos, mas o seu resultado é de grande importância para a Matemática, principalmente nos cursos de Cálculo. Esses limites são chamados de *Limites Fundamentais* e os mesmos são usados constantemente.

Observação 2.11.2 *a) Temos que que:*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen}(t)}{t} = 1.$$

Este limite é chamado de ***Limite Fundamental****. Uma interpretação para este limite é que quando o ângulo (em radianos) tem valor muito próximo de zero, então, o seu valor e o valor do seu seno são praticamente do mesmo e, por isto, o valor do quociente tende a* 1.

b) Um segundo limite chamado de fundamental diz que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$$

De fato: *Observe que*

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{\text{sen}^2(x)}{x(1+\cos(x))} =$$

$$= \frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\frac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} = 1.0 = 0.$$

□

c) Outro limite fundamental é dado por

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1.$$

De fato: *Temos que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}=1.1=1.$$

□

Exemplo 2.11.4 *Calcule* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(3x)}$, *se o limite existir.*

Solução: Temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{5x\,\text{sen}(5x)}{5x}}{\dfrac{3x\,\text{sen}(3x)}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(5x)}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(3x)}{3x}}.$$

Como $ax\to 0$ se a é constante e $x\to 0$, segue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(3x)}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{5x\to 0}\dfrac{\text{sen}(5x)}{5x}}{\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\text{sen}(3x)}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\text{sen}(u)}{u}}{\lim\limits_{v\to 0}\dfrac{\text{sen}(v)}{v}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(3x)}=\dfrac{5}{3}$. ■

Exemplo 2.11.5 *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

Solução: Temos que: $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{\text{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1-\cos(x)}{x}}{\dfrac{\text{sen}(x)}{x}}=\dfrac{0}{1}=0.$ ■

Exemplo 2.11.6 *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\tan^2(x)}{x^2}$.

Solução: Temos que $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\tan^2(x)}{x^2}=2\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}\right)^2=2.1^2=2.$ ■

Existem alguns teoremas que são extremamente utilizados na teoria de limites e suas demonstrações podem ser encontradas nas referências. Eles estão relacionados com o sinal de uma função num ponto, quando é conhecido o sinal do limite da função naquele mesmo ponto.

Teorema 2.11.2 *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e é um número positivo, então, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) > 0$, $\forall\ x \neq a$ no intervalo.*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Teorema 2.11.3 *Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e é um número negativo, então, existe um intervalo aberto contendo a tal que $f(x) < 0$, $\forall\ x \neq a$ no intervalo.*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Teorema 2.11.4 *Suponha que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esteja definida num intervalo aberto $I \subset X$ contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Suponha também que exista um número M para qual haja um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) \leq M$. Assim, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e for L, então, $L \leq M$.*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Teorema 2.11.5 *Suponha que a função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esteja definida num intervalo aberto $I \subset X$ contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Suponha também que exista um número M para qual haja um $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) \geq M$. Assim, se $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe e for L, então, $L \geq M$.*

Demonstração: Não será feita nessas notas. ■

Agora, vamos aos exercícios. Bons estudos.

2.12 Exercícios

Exercício 2.12.1 *Calcule o valor de cada limite a seguir, se o mesmo existir.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$; *e)* $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{3y}{\operatorname{sen}(5y)}$; *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\cos(x)}$; *m)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\operatorname{sen}(3x)}$; *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)}{x^2}$; *j)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^4(2x)}{4x^2}$; *n)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(4x)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(9x)}{\operatorname{sen}(7x)}$; *g)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^2(3x)}$; *k)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{2x}$; *o)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2}{1-\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$;

d) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3t)}{\operatorname{sen}(6t)}$; *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^5(2x)}{4x^5}$; *l)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$; *p)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x}{\operatorname{sen}(x)}$;

q) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-sen(x)}{\frac{\pi}{2}-x}$ *(sugestão: tome $t = \frac{\pi}{2} - x$).*

Exercício 2.12.2 *Utilize o Teorema do Confronto para obter o valor de cada um dos limites a seguir, se o mesmo existir.*

a) $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; *b)* $\lim_{x\to 0} x^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)$; *c)* $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$;

d) $\lim_{x\to 3} g(x)$, *sendo* $|g(x)+4| < 2(3-x)^4$, *para todo* x;

e) $\lim_{x\to -2} g(x)$, *sendo* $|g(x)-3| < 5(x+2)^2$, *para todo* x;

f) sabendo que $1-\cos^2(x) \le f(x) \le x^2$, *para todo* x *no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, *ache* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercício 2.12.3 *Suponha que* $|f(x)| \le M$, *onde* M *é uma constante. Então, calcule* $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercício 2.12.4 *Seja* $c > 0$ *uma constante de forma que* $0 \le f(x) \le c$, *para todo* x. *Prove que* $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

Exercício 2.12.5 *Prove que* $\lim_{x\to 0} x^4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$.