2.7 Representação e Parametrização de Superfícies

Em geral uma superfície S em $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0, \tag{2.1}$$

sendo F uma função contínua. A Equação 2.1 é chamada de *Representação Implícita* de S. Sendo possível isolar uma das variáveis na Equação 2.1 (digamos $z = f(x, y)$ ou $y = g(x, z)$ ou $x = h(y, z)$), obtemos uma *Representação Explícita* de S, ou de parte de S.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7.1 *A equação $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ é uma representação implícita da esfera de centro $A = (0, 0, 0)$ e raio $a > 0$. Colocando z em função de x, y, chegamos a $z_1 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e $z_2 = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, sendo z_1 e z_2 uma equação explícita de parte da esfera.*

■

Exemplo 2.7.2 *A equação $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} - a = 0$, $a > 0$ é uma representação implícita de um plano S. Se $y = f(x, z)$, então $y = 2a - 2x - \dfrac{2z}{3}$ é uma representação explícita do plano S.*

■

Agora, da mesma forma que fizemos para curvas, vamos parametrizar algumas superfícies. Dessa forma, seja S uma superfície no espaço. Se os pontos de S são determinados pelas equações

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \tag{2.2}$$

sendo x, y, z funções contínuas nas variáveis u e v, definidas numa região conexa R do plano UV. As Equações 2.2 são chamadas de *Equações Paramétricas de S*.

Se $\vec{r}(u, v)$ é o vetor posição de um ponto qualquer $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ da superfície, então,

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Assim, uma superfície S parametrizada pela Equação 2.2, pode ser representada por

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \ (u, v) \in R.$$

$\vec{r}(u, v)$ é chamada de *Representação Vetorial da Superfície S*. Um esboço do que representa a parametrização de uma superfície é dada pela Figura 2.4.

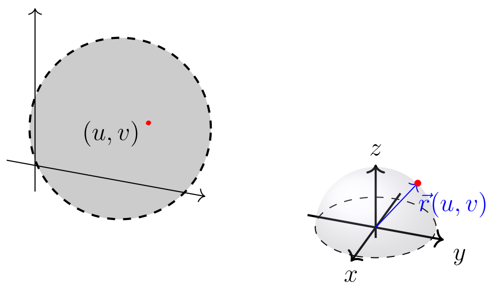

Figura 2.4: Ilustração da representação de uma superfície usando os parâmetros (u, v).

Exemplo 2.7.3 *A Equação Vetorial* $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2+1)$, *sendo* $-2 \leq u \leq 2$ *e* $0 \leq v \leq 5$, *representa uma superfície parametrizada em* $\mathbb{R}^3$. *Observe que se* $x = u$ *e* $y = v$, *então, a equação cartesiana de* S *fica dada por* $z = x^2 + 1$. *Assim, um esboço da superfície fica dado pela Figura 2.5.*

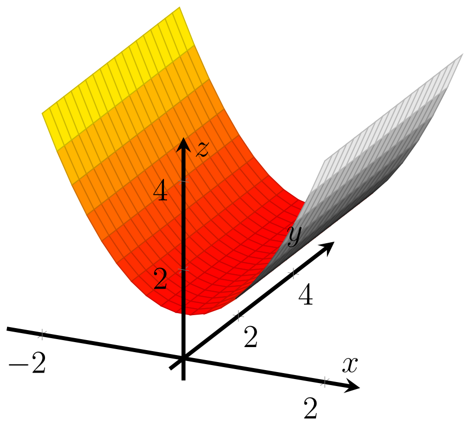

Figura 2.5: Superfície representada por $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + 1)$.

Agora, vamos estudar algumas parametrizações simples de superfícies. Estas superfícies são, de um modo geral, as mais usadas e, por isso, conhecer a sua representação vetorial é importante. Vamos iniciar com uma parametrização de uma esfera.

Parametrização da Esfera

Seja S uma esfera centrada na origem e raio $r > 0$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto de S. Considere u como sendo o ângulo da projeção do segmento $\overline{OP}$ com o semieixo positivo x e considere v como sendo o ângulo entre o segmento $\overline{OP}$ com o semieixo positivo z, como visto na Figura 2.6.

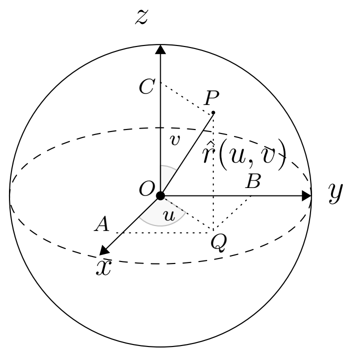

Figura 2.6: Ilustração de uma parametrização de uma esfera com centro na origem e raio a.

Do triângulo OPC temos que $\overline{OQ} = \overline{PC} = rsen(v)$ e que $z = \overline{OC} = rcos(v)$. Por outro lado, do triângulo AOQ temos que $x = \overline{OA} = \overline{OQ}cos(u) = rcos(u)sen(v)$ e $y = \overline{OB} = \overline{OQ}sen(u) = rsen(u)sen(v)$. Assim, uma parametrização para a esfera fica dada pela Equação 2.3.

$$\begin{cases} x(u,v) = rcos(u)sen(v) \\ y(u,v) = rsen(u)sen(v) \\ z(u,v) = rcos(v) \end{cases}, \text{ com } u \in [0, 2\pi] \text{ e } v \in [0, \pi]. \tag{2.3}$$

Uma parametrização da esfera vai depender principalmente da escolha dos ângulos u e v. Por isso, se for feita uma escolha diferente da posição dos ângulos na Figura 2.6, a Equação 2.3 será também diferente. Nessas notas não utilizaremos outra parametrização para a esfera, mas o leitor pode ficar a vontade em utilizar. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.7.4 *Obtenha uma parametrização da parte da esfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

que está no primeiro octante.

Solução: As equações paramétricas da parametrização da esfera são dadas como na Equação 2.3. Assim, parametrização para a esfera de centro na origem e raio $a > 0$ fica dada por

$$\vec{r}(u,v) = (acos(u)sen(v), asen(u)sen(v), acos(v)).$$

Temos que nos preocupar com a variação dos parâmetros u e v, visto que queremos uma parametrização apenas do primeiro octante. Então, para esse exemplo, temos que $x, y, z \geq 0$. Assim, temos que u vai de zero a $\frac{\pi}{2}$, da mesma forma que o v. Portanto,

$$\vec{r}(u,v) = (acos(u)sen(v), asen(u)sen(v), acos(v)), u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

■

Exemplo 2.7.5 *Determine uma parametrização da parte da esfera*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16,$$

que está acima do plano $z = 2$.

Solução: Novamente, utilizando a Equação 2.3, temos que uma parametrização para uma esfera de raio 4 fica dada por

$$\vec{r}(u, v) = (4cos(u)sen(v), 4sen(u)sen(v), 4cos(v)).$$

Agora, vamos obter os valores dos parâmetros u e v. Temos que $2 \leq z \leq 4$. Com relação ao parâmetro u não teremos dificuldades, visto que fazendo uma projeção da parte da esfera no plano XY teremos um círculo, Logo, $0 \leq u \leq 2\pi$.

Para o parâmetro v, como $2 \leq z \leq 4$ e como a função cosseno é decrescente no 1^o e no 2^o quadrantes, segue que

$$2 \leq z \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq 4cos(v) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq cos(v) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow arccos\left(\frac{1}{2}\right) \geq v \geq arccos(1) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \geq v \geq 0.$$

Portanto,

$$\vec{r}(u, v) = (4cos(u)sen(v), 4sen(u)sen(v), 4cos(v)),\ u \in [0, 2\pi], v \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

■

Exemplo 2.7.6 *Obtenha uma parametrização para a esfera*

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0.$$

Solução: Observe que

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 4 + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4,$$

ou seja, essa esfera está centrada em $A = (1, 2, 0)$ e tem raio 2. Utilizando a mesma ideia utilizada na parametrização da circunferência, ou seja, quando o centro da esfera é diferente da origem do sistema cartesiano somamos o vetor posição na parametrização, segue que uma parametrização para a esfera centrada em $A = (a, b, c)$ e raio $r > 0$ fica dada por

$$\vec{r}(u, v) = (a + rcos(u)sen(v), b + rsen(u)sen(v), c + rcos(v)),$$

com $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \pi]$. Portanto, para esse exemplo, temos que uma parametrização para a esfera $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 1 = 0$ fica dada por

$$\vec{r}(u, v) = (1 + 2cos(u)sen(v), 2 + 2sen(u)sen(v), 2cos(v)).$$

■

Parametrização do Cilindro Circular Reto

Considere um cilindro circular reto vertical, dado pela equação $x^2 + y^2 = a^2$. Seja $P = P(x, y, x)$ um ponto qualquer sobre o cilindro. Devemos introduzir dois parâmetros u e v para obter as coordenadas de P em função destas coordenadas.

Considere que u seja o ângulo entre a projeção de $\overline{OP}$ sobre o plano XY e o semieixo positivo x. Além disso, considere $z(u, v) = v$, como visto na Figura 2.7.

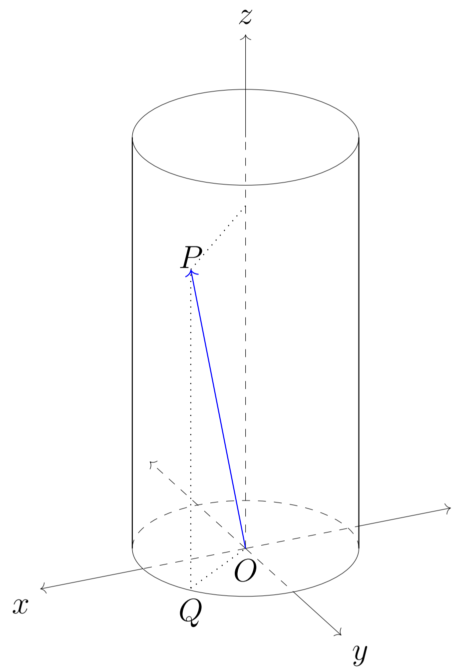

Figura 2.7: Ilustração de uma parametrização para o cilindro circular reto.

Observe que no plano XY, temos que a projeção do cilindro está sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e, por essa razão, temos que $x(u, v) = rcos(u)$ e $y(u, v) = rsen(u)$, com $u \in [0, 2\pi]$. Como $z = v$ e $z \in \mathbb{R}$, segue que uma parametrização do cilindro fica dada por

$$\vec{r}(u, v) = (rcos(u), rsen(u), v), \ 0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, temos que o cilindro está na posição vertical, ou seja, seu eixo é paralelo ao eixo z, visto que a equação do cilindro independe de z. Para as outras parametrizações, quando o cilindro está paralelo ao eixo x ou paralelo ao eixo y, temos que a parametrização é obtida de forma análoga.

Observação 2.7.1 *a) se a equação do cilindro independe da variável y, então, sua equação cartesiana é da forma $x^2 + z^2 = r^2$ e, por isso, teremos que uma parametrização fica dada por*

$$\vec{r}(u, v) = (rcos(u), v, rsen(u)), \ 0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

b) se a equação do cilindro independe da variável x, então, sua equação cartesiana é da forma $y^2+z^2 = r^2$ e, por isso, teremos que uma parametrização fica dada por

$$\vec{r}(u,v) = (v, rcos(u), rsen(u)),\ 0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.7.7 *Obtenha uma parametrização para parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com $0 \leq z \leq 5$, delimitados pelos semiplanos $y = x$ e $y = 2x$ e com $x \geq 0$.*

Solução: Temos que uma parametrização de um cilindro S é dada por

$$\vec{r}(u,v) = (2cos(u), 2sen(u), v),\ 0 \leq v \leq 5.$$

Além disso, temos que $x \leq y \leq 2x \Leftrightarrow 2cos(u) \leq 2sen(u) \leq 4cos(u)$, como $x \geq 0$. Logo, temos que $cos(u) \geq 0$ e, por isso,

$$1 \leq tg(u) \leq 2 \Leftrightarrow arctg(1) \leq u \leq arctg(2),$$

pois a função tangente é crescente em todos os quadrantes. Assim, $\dfrac{\pi}{4} \leq u \leq arctg(2)$. Portanto, uma parametrização para a região fica dada por

$$\vec{r}(u,v) = (2cos(u), 2sen(u), v),\ \frac{\pi}{4} \leq u \leq arctg(2),\ 0 \leq v \leq 5.$$

Um esboço d superfície S parametrizada é dada pela Figura 2.8.

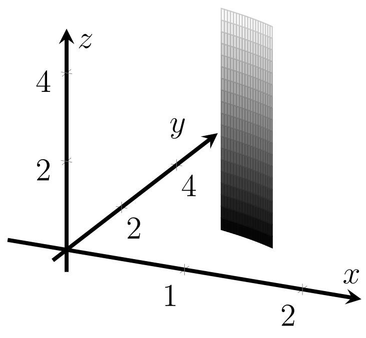

Figura 2.8: Superfície S obtida no Exemplo 2.7.7.

■

Exemplo 2.7.8 *Obtenha uma parametrização para o cilindro $x^2 + z^2 = 5$.*

Solução: Nesse caso temos que a variável y não está relacionada com as outras duas. Logo, tomando $v = y$, temos que

$$\vec{r}(u,v) = (\sqrt{5}cos(u), v, \sqrt{5}sen(v)),\ u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

■

Exemplo 2.7.9 *Obtenha uma parametrização para o cilindro $(y-4)^2+(z-2)^2 = 16$, com $y \geq 0$ e $z \geq 0$.*

Solução: Para esse caso temos que a equação cartesiana do cilindro independe da variável x e, por isso, uma equação vetorial fica dada por

$$\vec{r}(u,v) = (v, 4 + 4cos(u), 2 + 4sen(u)).$$

Como $y \geq 0$ e $z \geq 0$, segue que $4 + 4cos(u) \geq 0$ e $2 + 4sen(u) \geq 0$, ou seja, $cos(u) \geq -1$ e $sen(u) \geq -\dfrac{1}{2}$ e, consequentemente, $u \in [0, 2\pi] \setminus \left[\dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{19\pi}{6}\right]$. Além disso, temos que x pode assumir qualquer valor e, por isso, $v = x \in \mathbb{R}$. Portanto, uma parametrização para o cilindro fica dada por

$$\vec{r}(u,v) = (v, 4 + 4cos(u), 6 + 4sen(u)), u \in [0, 2\pi] \setminus \left[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\right], v \in \mathbb{R}.$$

■

Exemplo 2.7.10 *É possível parametrizar o cilindro* $x^2 - 8x + y^2 + 12y + 36 = 0$*, com* $x, y \geq 0$*? Justifique a sua resposta.*

Solução: Se for possível parametrizar o cilindro, então teríamos

$$x^2 - 8x + y^2 + 12y + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+6)^2 = 16$$

e, por isso, o cilindro ficaria dado por

$$\vec{r}(u,v) = (4 + 4cos(u), -6 + 4sen(v), v).$$

Assim, teríamos $-6 + 4sen(v) \geq 0 \Rightarrow sen(v) \geq \dfrac{3}{2} > 1$, o que nunca ocorre. Portanto, não é possível parametrizar o cilindro nas condições imposta. ■

Agora, faça alguns exercícios.

2.8 Exercícios

Exercício 2.8.1 *Obtenha uma parametrização para as seguintes superfícies dada de forma implícitas por cada uma das equações a seguir.*

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y = 4$;
2. $x^2 + y^2 - z = 1$;
3. $x + y + z = 8$;
4. $x^2 + z^2 = 4,\ y \in \mathbb{R}$;
5. $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 1 = 0$;
6. *da esfera centrada na origem e raio* $\sqrt{2}$;
7. *da esfera centrada em* $(2, -1, 3)$ *e raio* 4;
8. *parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ *que está no segundo octante;*

9. *da parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ *que está acima do plano* $z = 2$*;*

10. *da parte da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *tal que* $x \geq 0$ *e* $y \leq 0$*;*

11. *do cilindro* $y^2 + z^2 = 0,\ 0 \leq x \leq 4$*;*

12. *da parte do paraboloide* $z = x^2 + y^2 - 1$*, que está entre os planos* $z = 0$ *e* $z = 3$*;*

13. *parte do plano* $x + y + z = 4$ *que está no primeiro octante;*

14. *parte do plano* $y + z = 8$*, delimitada pelo cilindro* $x^2 + y^2 = 4$.

Exercício 2.8.2 *Escreva uma equação cartesiana para a superfície dada por* $\vec{f}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$*. Descreva qual superfície é dada por* $\vec{f}(u, v)$.

Exercício 2.8.3 *Sabendo que uma superfície* S *é dada por* $\vec{\varphi}(\rho, \theta) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta))$*:*

a) *Desenhe o conjunto* $\vec{\varphi}(B)$ *onde* B *é a reta* $\rho = 2$*;*

b) *Desenhe o conjunto* $\vec{\varphi}(B)$ *onde* B *é o retângulo* $0 \leq \rho \leq 2$ *e* $0 \leq \theta \leq 2\pi$.