

1.9 Paridade e Bijetividade de Funções

No estudo de funções muitas vezes buscamos identificar características que um grupo de funções possuem, de forma a estabelecer ferramentas que podem ser utilizadas neste grupo de funções que se comportam com a mesma característica. Nesta seção vamos apresentar algumas dessas propriedades, começando com a *Paridade* de uma função.

Definição 1.9.1 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada de **Função Par** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$. Uma função $f : A \rightarrow B$ é chamada de **Função Ímpar** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$. Em ambos os casos, temos que $-x \in D_f$.*

■

É importante ressaltar que paridade está relacionada com o sinal de uma função no ponto x e no seu oposto $-x$. Assim, observando com muita atenção a Definição 1.9.1, concluímos que para uma função ser par ou ímpar existe primeiro a necessidade de $|f(x)| = |f(-x)|$, para todo $x \in D_f$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.9.1 *A função $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ é uma função par.*

De fato: *Temos que:*

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 7 = 3x^4(-1)^4 - 2x^2(-1)^2 + 7 = 3x^4 - 2x^2 + 7 = f(x).$$

□

Portanto, como $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ é uma função par.

■

Exemplo 1.9.2 *A função $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$ é uma função ímpar.*

De fato: *Temos que*

$$\begin{aligned} g(-x) &= 3(-x)^5 - 4(-x)^3 - 9(-x) = 3x^5(-1)^5 - 4x^3(-1)^3 - 9x(-1) = \\ &= -3x^5 + 4x^3 + 9x = -(3x^5 - 4x^3 - 9x) = -g(x). \end{aligned}$$

□

Portanto, como $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$ é uma função ímpar.

■

Por causa da familiaridade com números inteiros, quando ouvimos que uma função é par ou ímpar, há uma ansiedade de pensar que não existe outra possibilidade, ou seja, toda função ou é par ou é ímpar. Mas não confunda o conceito de paridade de funções com o de números inteiros, pois no estudo de funções existe uma terceira possibilidade de paridade, ou seja, existem funções que não são pares e não são ímpares, como destacada na observação a seguir.

Observação 1.9.1 Existem funções que $|f(-x)| \neq |f(x)|$, para algum $x \in D_f$. Por exemplo, se $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função dada por $h(x) = x^2 - x$, então, $h(2) = 2$ e $h(-2) = 6$. Portanto, essa função não é uma função par e também não é uma função ímpar e, por isso, dizemos que h é uma função **Nem Par e Nem Ímpar**. ■

Existe uma outra maneira de verificar se uma determinada função é par, ímpar ou nem par e nem ímpar. Essa maneira é analisar o comportamento do seu gráfico, como destacado na próxima observação.

Observação 1.9.2 O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, visto que $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ e $(x, f(x))$ estão em Gr_f . Por exemplo, na Figura 1.19 são apresentados alguns esboços de gráficos de funções pares.

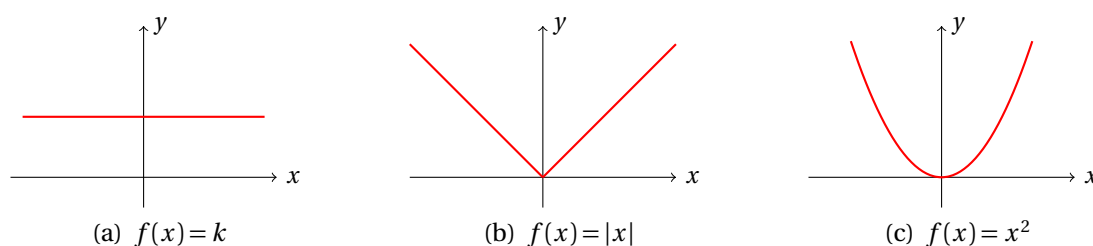


Figura 1.19: Esboço de gráficos de funções pares.

O gráfico da função ímpar é simétrico em relação a origem, pois tanto $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ quanto $(x, f(x))$ estão em Gr_f . Na Figura 1.20 são apresentados alguns esboços de gráficos de funções ímpares.

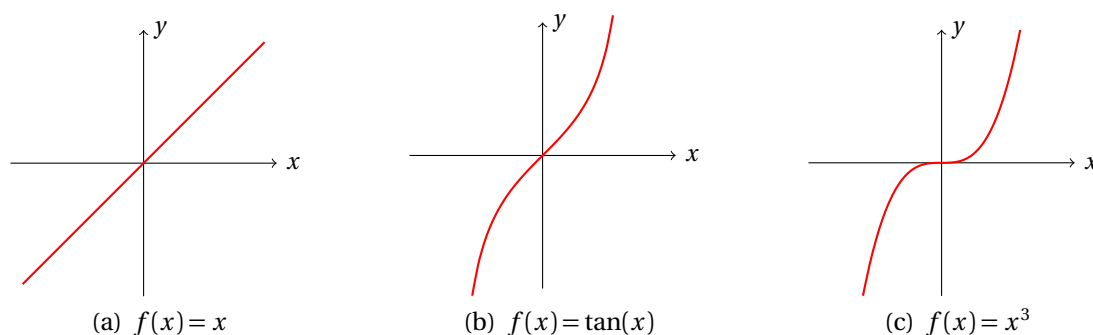


Figura 1.20: Esboço de gráficos de funções ímpares.

Portanto, gráficos de funções que não apresentam simetria em relação ao eixo das ordenadas ou em relação a origem representa um função nem par e nem ímpar. ■

Dizer que um gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas é dizer que se os pontos de abscissa positiva forem sobrepostos sobre os seus correspondentes negativos, então, as duas partes do gráfico coincidiriam. Por outro lado, dizer que um gráfico de uma função f é simétrico em relação a origem é dizer que se for tomado o gráfico de $|f|$, então, ele é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

Feito um estudo da paridade de uma função, vamos falar de *Crescimento* de funções.

Definição 1.9.2 *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : A \rightarrow B$ cuja imagem consiste de um único número é chamada de **Função Constante**. Usamos a notação*

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ x &\mapsto f(x) = c \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$, para representar uma função constante.

■

Definição 1.9.3 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Crescente** se, e somente se, $f(x_1) \leq f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$.*

■

Definição 1.9.4 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser **Decrescente** se, e somente se, $f(x_1) \geq f(x_2)$, sempre que $x_1 < x_2$.*

■

Em resumo, temos que num intervalo uma função pode ser constante, crescente ou decrescente. A seguir é apresentado um exemplo para auxiliar na fixação dessas novas definições. Não se esqueça que a análise de crescimento é feita no conjunto imagem da função, mas os pontos de crescimento estão no conjunto domínio da função.

Exemplo 1.9.3 *Seja f uma função cujo esboço de seu gráfico é dada pela Figura 1.21. Considere as coordenadas dos pontos indicados como a seguir: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, $D = (x_4, y_4)$, $E = (x_5, y_5)$, $F = (x_6, y_6)$. Encontre os intervalos onde a função é crescente e onde ela é decrescente.*

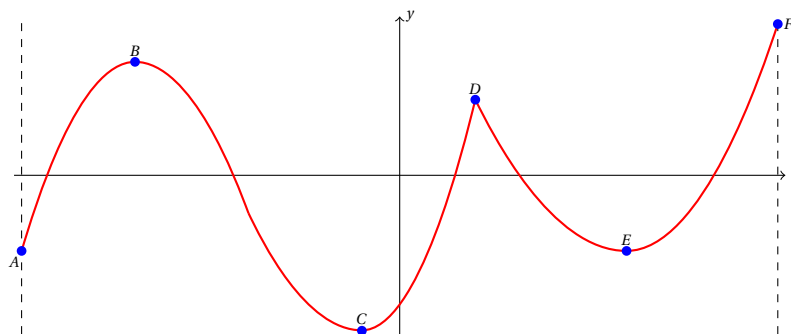


Figura 1.21: Função do Exemplo 1.9.3.

Solução: Observe que o comportamento da função saindo do ponto A até o ponto B é o mesmo e, por isso, basta analisar o que está acontecendo entre esses dois pontos. Saindo do ponto de abscissa x_1 e caminhando até o ponto de abscissa x_2 , temos que o valor de f aumenta, pois $f(x_1)$ tem valor menor do que o valor de $f(x_2)$ (pois $f(x_1)$ está embaixo de $f(x_2)$ no eixo das ordenadas). Portanto, f é crescente no intervalo $[x_1, x_2]$.

Da mesma forma, é preciso estudar o que acontece entre os pontos B e C . Veja que ao sair do ponto de abscissa x_2 para o ponto de abscissa x_3 , temos que o valor de f diminui, pois $f(x_2)$ tem valor maior do que o valor de $f(x_3)$ ($f(x_3)$ está abaixo de $f(x_2)$ no eixo das ordenadas). Portanto, f é decrescente no intervalo $[x_2, x_3]$.

Analisando de C a D , quando saímos do ponto de abscissa x_3 para o ponto de abscissa x_4 , temos que o valor de $f(x_3)$ é menor do que o valor de $f(x_4)$. Portanto, f é crescente no intervalo $[x_3, x_4]$. De D a E , quando saímos da abscissa x_4 para a abscissa x_5 , temos que o valor de $f(x_4)$ é de maior valor, se comparado com o valor de $f(x_5)$. Portanto, f é decrescente no intervalo $[x_4, x_5]$. Por fim, saindo de E para F , partindo do ponto de abscissa x_5 para o de abscissa x_6 , como o valor de $f(x_5)$ é menor do que o valor de $f(x_6)$, segue que f é crescente no intervalo $[x_5, x_6]$.

Portanto, f é crescente nos intervalos $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$ e $[x_5, x_6]$ e f é decrescente nos intervalos $[x_2, x_3]$ e $[x_4, x_5]$. ■

Outra característica importante que um grupo de funções pode ter, está relacionado com a *Periodicidade* da função, como definido a seguir.

Definição 1.9.5 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Dizemos que uma função $f : A \rightarrow B$ é **Periódica** se existe um número real $T \neq 0$ de forma que $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$. O menor número real positivo T com essa propriedade é chamado de **Período** de f . ■

Podemos pensar numa função periódica como sendo uma função que a cada intervalo de comprimento T , temos um mesmo comportamento, ou seja, tomando um ponto do domínio da função e se a partir dele fosse “recortando” o desenho do gráfico da função num comprimento T , então, todas as partes recortadas coincidiriam.

Observação 1.9.3 Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ uma função periódica de período T e seja $a \in D_f$. Para quaisquer dois intervalos da forma $[a + (n - 1)T, a + nT]$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos que as partes do gráfico correspondente a cada intervalo são idênticas. ■

Algumas funções periódicas já são conhecidas, sendo que algumas delas podem ser observadas no próximo exemplo.

Exemplo 1.9.4 A Função $f(x) = \sin(x)$ e a função $f(x) = \cos(x)$ são exemplos de funções periódicas com período igual a 2π .

De fato:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)\cos(2\pi) + \sin(2\pi)\cos(x) = \sin(x).1 + 0.\cos(x) = \sin(x),$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) - \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x).1 - 0.\sin(x) = \cos(x).$$

□

■

Outra propriedade extremamente importante no estudo de funções é a *Bijetividade*. Esse conceito é extremamente fundamental na formulação da teoria envolvendo *Funções Inversas*.

Definição 1.9.6 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : A \rightarrow B$ é dita ser

- **Injetiva** (ou **Injetora**) se, e somente se, $\forall a, b \in A$, com $a \neq b$, temos que $f(a) \neq f(b)$.
- **Sobrejetiva** (ou **Sobrejetora**) se, e somente se, $Im_f = CD_f$.
- **Bijeção** (ou **Relação Biunívoca**) se, e somente se, f é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

■

A definição de injetividade pode ser reescrita como a seguir: sejam $A, B \subset \mathbb{R}$, assim uma função $f : A \rightarrow B$ é injetiva se, e somente se, $\forall a, b \in A$, se $f(a) = f(b)$, então, $a = b$. As duas definições são equivalentes e, por isso, qualquer uma das duas podem ser utilizadas para determinar se uma função é, ou não, injetiva. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.9.5 A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x - 3$ é sobrejetiva, visto que $Im_g = \mathbb{R} = CD_g$. Além disso, g é uma função injetiva, visto que $g(a) = g(b) \Leftrightarrow a - 3 = b - 3 \Leftrightarrow a = b$. Portanto, a função g é uma bijeção em $\mathbb{R}$.

■

Exemplo 1.9.6 A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é uma função injetiva, visto que $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a^3 = b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{b} = b$. Além disso a função f também é sobrejetiva, visto que $Im_g = \mathbb{R} = CD_f$. Portanto, a função f é uma bijeção em $\mathbb{R}$.

■

Observando atentamente as condições de injetividade e sobrejetividade, podemos perceber que elas são idênticas as condições necessárias para verificar se uma relação é, ou não, uma função, só que a análise é feita de forma inversa em relação ao conjunto imagem e conjunto domínio, ou seja, para ser função verificamos as condições do conjunto domínio para o contradomínio e para ser injetiva e sobrejetiva analisamos as mesmas condições do conjunto contradomínio para o domínio.

Sendo assim, se uma função $f : A \rightarrow B$ é uma bijeção, então, podemos definir uma relação de B em A , pois essa relação também definirá uma função. Essa função é chamada de *Função Inversa*, como visto a seguir.

Definição 1.9.7 Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow B$ uma bijeção. Então, a função $f^{-1} : B \rightarrow A$ de forma que $f^{-1}(y) = x$, é chamada de **Função Inversa** de f .

■

É muito importante o estudo da inversa de uma função, visto que muitas vezes é a função inversa que é a de interesse. Uma forma de se obter a inversa de uma função é proceder da seguinte forma:

- verifique o D_f da função;
- substitua $f(x)$ por y na função;
- isole a variável x da função f ;

- d) tome $f^{-1}(y) = x$;
 e) encontre o $D_{f^{-1}}$ e faça $Im_f = D_{f^{-1}}$ e $Im_{f^{-1}} = D_f$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.9.7 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 5$. Então, temos que:

$$y = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x = y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2}.$$

Para esse exemplo, $D_f = \mathbb{R} = Im_f$. Portanto a função inversa de f é a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.9.8 Obtenha o conjunto domínio, a imagem, a função inversa (com os respectivos conjuntos domínio e imagem), da função $f(x) = \frac{x-1}{3-x}$.

Solução: Observe que f está definida para todo número real diferente de 3. Além disso,

$$\begin{aligned} y = \frac{x-1}{3-x} &\Leftrightarrow y(3-x) = x-1 \Leftrightarrow -xy + 3y = x-1 \Leftrightarrow x + xy = 3y+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(y+1) = 3y+1 \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y+1} \end{aligned}$$

e, por isso, $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y+1}$ está definida para todo número real diferente de -1 . Portanto, temos que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\} & f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x-1}{3-x} & e & & y &\mapsto f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y+1}. \end{aligned}$$

■

Uma função e sua inversa apresentam uma característica muito interessante, relacionada ao comportamento do seu gráfico, como observado a seguir.

Observação 1.9.4 É possível identificar se uma função é inversa de outra pela comparação dos seus gráficos. Os gráficos de uma função f e de sua função inversa f^{-1} são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares. Em outras palavras, $\forall x \in D_f$ se $(x, y) \in Gr_f$, então, $(y, x) \in Gr_{f^{-1}}$, para todo $y \in D_{f^{-1}}$.

■

Exemplo 1.9.9 Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a função dada por $f(x) = x^2$. Temos que f não é uma bijeção, visto que ela não é injetiva ($f(-1) = 1 = f(1)$) e nem sobrejetiva ($CD_f = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}_+ = Im_f$). Contudo, ela se torna uma bijeção considerando a restrição $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Assim, temos que $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fica dada por $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Então, $\forall x \in D_f, (x, x^2) \in Gr_f$ e que $(y, \sqrt{y}) \in Gr_{f^{-1}}$, para todo $y \in D_{f^{-1}}$. Um esboço do gráfico de f e f^{-1} são apresentados na Figura 1.22. Repare que a reta $y = x$ é o eixo de simetria entre os desenhos dos dois gráficos.

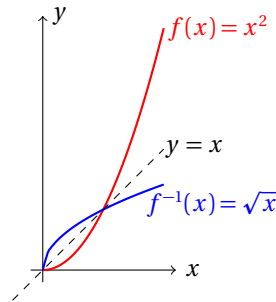


Figura 1.22: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

■

Agora, faça alguns exercícios para treinar. Bons estudos.

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1 Determine se cada uma das funções abaixo são par, ímpar ou nem par e nem ímpar.

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$; | k) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$; | t) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 1}$; |
| b) $f(x) = 5x^3 - 7x$; | l) $f(x) = 2x^3 - 3x$; | u) $f(x) = x^2 \cos(x)$; |
| c) $f(s) = sx^2 + 2s + 2$; | m) $f(x) = 1 - x^4$; | v) $f(x) = x - 4 + x + 4 $; |
| d) $g(x) = x^6 - 1$; | n) $f(x) = 1 + x^2$; | w) $f(x) = 3x \sin(x) - 3 \cos(x)$; |
| e) $h(t) = 5t^7 + 1$; | o) $f(x) = x + x^2$; | x) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 7$; |
| f) $f(x) = x $; | p) $f(x) = x + x^3$; | y) $f(x) = \frac{ x^3 - 5x^2 + 2x + 8 }{x - 2}$; |
| g) $f(x) = (x - 1)^2$; | q) $f(x) = x^5 + x$; | |
| h) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; | r) $f(x) = 1 + x^3$; | |
| i) $f(x) = 2x^3 - 3x$; | s) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$; | z) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } -1 < x < 1 \\ x^2 - x , & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$. |
| j) $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 1$; | | |

Exercício 1.10.2 Sejam f e g duas funções pares. Então, mostre que:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f + g$ é uma função par; | d) f/g é uma função par; |
| b) $f - g$ é uma função par; | e) g/f é uma função par; |
| c) $f \cdot g$ é uma função par; | f) $f \circ g$ é uma função par. |

Exercício 1.10.3 Sejam f e g duas funções ímpares. Então, mostre que:

- a) $f + g$ é uma função ímpar; d) f/g é uma função par;
 b) $f - g$ é uma função ímpar; e) g/f é uma função par;
 c) $f \cdot g$ é uma função par; f) $f \circ g$ é uma função ímpar.

Exercício 1.10.4 Sejam f uma função par e g uma função ímpar. Então, o que podemos falar de cada uma das funções a seguir:

- a) $f + g$; c) f/g ; e) g/f ;
 b) $f - g$; d) $f \cdot g$; f) $f \circ g$.

Exercício 1.10.5 Existe uma função que é par e ímpar ao mesmo tempo? Se sim, qual função que é esta?

Exercício 1.10.6 Determine os intervalos onde cada uma das funções abaixo é crescente, decrescente e constante, em todo o seu domínio:

- a) $f(x) = x - 5$; d) $f(x) = -x^2 - 5x + 6$; g) $f(t) = t^4$;
 b) $f(x) = 3 + 5x$; e) $f(x) = \cos(x)$; h) $f(s) = s^5$;
 c) $f(x) = x^2 - 3x - 4$; f) $f(x) = x^3$; i) $f(x) = 5$;
 j) $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & \text{se } x \leq -2 \\ 4x^2 - 16 & \text{se } -2 < x < 4 \\ 4 - 2x, & \text{se } 2 \leq x \end{cases}$; k) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \leq 0 \\ 16 - x^2 & \text{se } 0 < x \leq 4 \\ -4x, & \text{se } 4 < x \end{cases}$.

Exercício 1.10.7 Sejam f e g duas funções periódicas e de período T . Então, mostre que:

- a) $f + g$ é uma função periódica; d) f/g é uma função periódica;
 b) $f - g$ é uma função periódica; e) g/f é uma função periódica;
 c) $f \cdot g$ é uma função periódica; f) $f \circ g$ é uma função periódica.

Exercício 1.10.8 Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período T . Então, mostre que:

- a) $g(x) = f(3x)$ também é uma função periódica.
 b) $g(x) = f(-x)$ também é uma função periódica.
 c) $g(x) = f(x) + b$, onde $b \in \mathbb{R}$, também é uma função periódica.
 d) $g(x) = a f(x)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$, também é uma função periódica.
 e) $g(x) = f(x + m)$, onde $m \in \mathbb{R}$, também é uma função periódica.
 f) $g(x) = f(nx)$, onde $n \in \mathbb{R}^*$, também é uma função periódica.

Exercício 1.10.9 Esboce o gráfico da função $g(x) = x^2$ para $-1 \leq x \leq 1$. Em seguida, construa uma função periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que coincida com g no intervalo dado.

Exercício 1.10.10 Em cada uma das funções abaixo, encontre a sua inversa e apresente o conjunto domínio e o conjunto imagem das duas funções.

- a) $y = 3x + 4$; h) $y = x^2 - 4, \forall x \leq 0$; o) $y = \frac{x+5}{2x-1}$;
 b) $y = \frac{x+a}{x-a}$; i) $y = x^2 - 4, \forall x \geq 0$; p) $y = \frac{1}{x+8}$;
 c) $y = \sqrt{x-1}, \forall x \geq 1$; j) $y = \frac{5x-3}{2x-1}$; q) $y = \frac{2}{x-2}$;
 d) $y = \frac{1}{x-a}$; k) $f(x) = \frac{2x+6}{7}$; r) $y = \frac{3x+8}{2}$;
 e) $y = \frac{1}{x}, \forall x > 0$; l) $y = \frac{2x+4}{3x+2}$; s) $y = \frac{2x+5}{3x-7}$;
 f) $y = -\sqrt{a-x}, \forall x \leq a$; m) $f(x) = \frac{2x}{3} - 45$; t) $f(x) = x^2$.
 g) $y = \frac{x^2}{x^2+1}, \forall x \geq 0$; n) $y = \frac{2x+2}{x-2}$;

Exercício 1.10.11 Mostre que a função $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ é igual a sua inversa.

Exercício 1.10.12 Considere a função $f(x) = \frac{x+1}{2x+m}$ e sua inversa $f^{-1}(y)$. Se $f^{-1}(2) = 5$, qual o valor de m ?

Exercício 1.10.13 Mostre que a função $f(x) = 2 - x^5$ é a inversa da função $g(y) = \sqrt[5]{2-y}$.