

2.7 Limites no Infinitos de Funções reais de uma variável real

Agora, considere a situação onde a variável independente cresce, ou decresce, indefinidamente. Por exemplo, para a função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ o que acontece quando tomamos valores positivos de x cada vez maiores? Na verdade, o valor funcional de f torna-se cada vez mais próximo de 2. Logo, parece natural pensar podemos tomar o valor de $f(x)$ tão próximo de 2 quanto desejarmos, para isso, basta tomar valores de x suficientemente grande.

Essa é a ideia que é usada para definir os chamados *Limites no Infinitos*. Uma informação importante é que quando a variável pode crescer indefinidamente através de valores positivos, nós escreveremos $x \rightarrow +\infty$. Analogamente, podemos definir o limite de uma função quando a variável decrescer indefinidamente escrevendo $x \rightarrow -\infty$. Vamos a definição formal.

Definição 2.7.1 Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $]a, +\infty[\subset X$. O **Limite de $f(x)$ é L quando x Cresce Indefinidamente**, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

se $\forall \epsilon > 0$ dado, $\exists N > 0$ tal que se $x > N$, então, $|f(x) - L| < \epsilon$. ■

Definição 2.7.2 Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num intervalo $]-\infty, a[\subset X$. O **Limite de $f(x)$ é L quando x Decresce Indefinidamente**, e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

se $\forall \epsilon > 0$ dado, $\exists N > 0$ tal que se $x < -N$, então, $|f(x) - L| < \epsilon$. ■

Usando a definição de limites no infinito, é possível demonstrar as propriedades a seguir. Elas serão deixadas como exercícios para aqueles que tiverem a curiosidade de praticar a definição de limites no infinito. Essas propriedades são de grande ajuda no cálculo de limites infinitos.

Teorema 2.7.1 Seja $r \in \mathbb{N}$, Então:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^r} = 0; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Demonstração: Exercício. ■

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7.1 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{2x + 5}$.

Solução: Observe que $f(x) = \frac{4x-3}{2x+5}$ é uma função racional onde tanto o polinômio do numerador quando do denominador tem grau um. Então, vamos colocar x em evidência nos dois termos da fração. Assim, usando as propriedades da fatoração e as propriedades de limites de funções, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{5}{x}} = \frac{4-3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}{2+5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{4-3.0}{2+5.0} = \frac{4}{2} = 2.$$

■

Exemplo 2.7.2 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$.

Solução: Observe que $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$ é uma função racional onde o polinômio do numerador tem grau dois e o do denominador tem grau três. Então, vamos colocar x^3 em evidência nos dois termos da fração. Assim, usando as propriedades de fatoração e aplicando as propriedades de limite de funções chegamos a:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^3 \left(4 - \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}} = \frac{0-0+0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0.$$

■

Exemplo 2.7.3 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$.

Solução: Considere $g(x) = 3x+4 = x \left(3 + \frac{4}{x}\right)$ e $h(x) = 2x^2-5 = x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)$. Dessa forma, como $x \rightarrow +\infty$, segue que $x > 0$ e, consequentemente, $x = |x| = \sqrt{x^2}$. Assim, considerando $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$, chegamos a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{2-0}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

■

Exemplo 2.7.4 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}$.

Solução: Considere $g(x) = 3x+4 = x \left(3 + \frac{4}{x}\right)$ e $h(x) = 2x^2-5 = x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)$. Dessa forma, como $x \rightarrow -\infty$, segue que $x < 0$ e, consequentemente, $x = -|x| = -\sqrt{x^2}$.

Assim, considerando $f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$, chegamos a:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}\left(3+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3+\frac{4}{x}}{\sqrt{2-\frac{5}{x^2}}} = \\ &= -\frac{3+0}{\sqrt{2-0}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.7.5 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1}$.

Solução: Observe que $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ é uma função racional onde o polinômio do numerador tem grau dois e o do denominador tem grau um. Então, vamos colocar x^2 em evidência nos dois termos da fração. Além disso, observe que $x \rightarrow +\infty$ e, por isso, $\frac{1}{x} \rightarrow 0^+$ e $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0^+$. Assim, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot 1}{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

■

Exemplo 2.7.6 Calcule, se existir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5}$.

Solução: Observe que $f(x) = \frac{2x-x^2}{3x+5}$ é uma função racional onde o polinômio do numerador tem grau dois e o do denominador tem grau um. Então, vamos colocar x^2 em evidência nos dois termos da fração. Além disso, observe que $x \rightarrow +\infty$ e, por isso, $\frac{3}{x} \rightarrow 0^+$ e $\frac{5}{x^2} \rightarrow 0^+$. Assim, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-x^2}{3x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right)}{x^2 \left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

■

Da mesma forma que no caso dos limites infinitos, caso o valor da variável independente cresça indefinidamente e com isso o valor da função fique cada vez mais próximo da reta $y = b$, teremos uma assíntota que, nesse caso, será horizontal. A definição formal é apresentada a seguir.

Definição 2.7.3 A reta $y = b$ é denominada **Assíntota Horizontal** do gráfico da função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e para algum $N > 0$, se $x > N$, então, $f(x) \neq b$.
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e para algum $N > 0$, se $x < -N$, então, $f(x) \neq b$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.7.7 Encontre, se existirem, as assíntotas horizontais e faça um esboço do gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Solução: Observe que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x \cdot 1}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x \cdot 1}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{x \cdot 1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}.$$

Portanto, temos que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Consequentemente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ e que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Portanto, as retas $y = 1$ e $y = -1$ são as assíntotas horizontais do gráfico da função f .

Observe que a função não possui assíntotas verticais, visto que o denominador é sempre não nulo. Um esboço do gráfico de f é apresentado pela Figura 2.7.

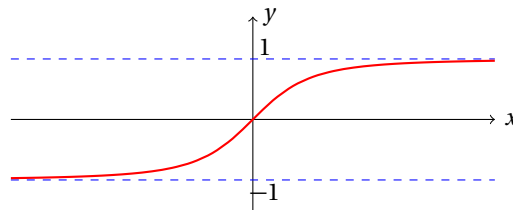


Figura 2.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

■

Exemplo 2.7.8 Encontre as assíntotas (verticais e horizontais) e faça um esboço do gráfico da equação $xy^2 - 2y^2 - 4x = 0$.

Solução: Temos que $xy^2 - 2y^2 - 4x = 0 \Rightarrow y^2(x-2) = 4x$. Assim, considerando $x \neq 2$ temos que $y^2(x-2) = 4x \Rightarrow y^2 = \frac{4x}{x-2}$. Por outro lado, garantindo que $\frac{4x}{x-2} \geq 0$, temos que $y = \pm \sqrt{\frac{4x}{x-2}}$.

Dessa forma, considerando $f(x) = \sqrt{\frac{4x}{x-2}}$ e $g(x) = -\sqrt{\frac{4x}{x-2}}$ e as condições já descritas, temos que o domínio das funções f e g ficam dadas por $D_f = D_g =]-\infty, 0] \cup]2, +\infty[$, como visto na Figura 2.8.

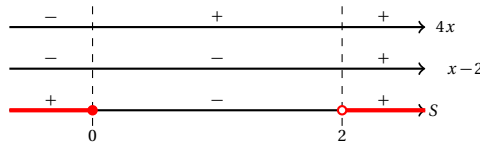


Figura 2.8: Estudo do domínio das funções $y = \pm \sqrt{\frac{4x}{x-2}}$.

Dessa forma, temos que a candidata a assíntota vertical é a reta $x = 2$, visto que é o ponto que torna o denominador das funções f e g nulo. Assim, como

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} -2\sqrt{\frac{x}{x-2}} = -\infty.$$

segue que a reta $x = 2$ é a assíntota vertical do gráfico da equação. Por outro lado, calculado os limites no infinitos das funções f e g temos que

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = 2, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -2, \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = 2, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -2\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}} = -2, \end{aligned}$$

Portanto, as retas $y = 2$ e $y = -2$ são as assíntotas horizontais do gráfico da equação. Um esboço do gráfico da equação fica dado pela Figura 2.9.

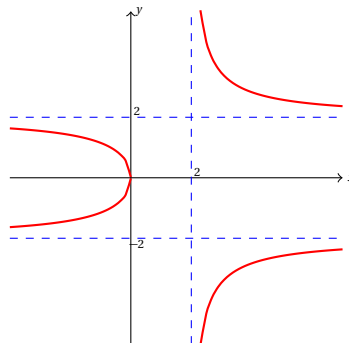


Figura 2.9: Esboço do gráfico da função $xy^2 - 2y^2 - 4x = 0$.

■

Agora, pratique os conceitos aprendido. Bons estudos.

2.8 Exercícios

Exercício 2.8.1 Calcule, se existir, o limite indicado.

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t+1}{5t-2}; & \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+4}{3x^2-5}; & \quad g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3-4}{5x+3}; & \quad j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}; \\
 b) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2x+7}{4-5x}; & \quad e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-3x}{x+1}; & \quad h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \frac{1}{x^2}\right); & \quad k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+5}. \\
 c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+1}{3x^2+8x+5}; & \quad f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}; & \quad i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4};
 \end{aligned}$$

Exercício 2.8.2 Encontre, se existir, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função f e faça um esboço do mesmo.

$$\begin{aligned}
 a) f(x) &= \frac{1}{x-4}; & e) f(x) &= \frac{1}{x-1}; & i) f(x) &= \frac{2x+1}{x-3}; & m) f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}; \\
 b) f(x) &= \frac{2x+1}{x-3}; & f) f(x) &= 1 + \frac{1}{x^2}; & j) f(x) &= \frac{4-3x}{x+1}; & n) f(x) &= \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}; \\
 c) f(x) &= \frac{4-3x}{x+1}; & g) f(x) &= \frac{1}{x^2-5x+4}; & k) f(x) &= 1 - \frac{1}{x}; & o) f(x) &= \frac{5x^2+8}{4x^2-9}; \\
 d) f(x) &= 1 - \frac{1}{x}; & h) f(x) &= \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}; & l) f(x) &= 1 + \frac{1}{x^2}; & p) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}; \\
 q) f(x) &= \frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-5)^2}}; & r) f(x) &= \frac{x^2+5x-36}{\sqrt{x^3-5x^2+3x+9}}; & s) f(x) &= \frac{x^2-11x+30}{\sqrt{x^3-4x^2-3x+18}}.
 \end{aligned}$$

Exercício 2.8.3 Encontre, se existir, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da equação a seguir faça um esboço do mesmo.

$$\begin{aligned}
 a) \quad & yx + 2y - 6x = 0; & g) \quad & y^2x + 8y^2 - 4x = 0; \\
 b) \quad & 3xy - 2x - 4y - 3 = 0; & h) \quad & y^2x^2 - y^2 + 2x - 4 = 0; \\
 c) \quad & x^2y^2 - x^2 + 4y^2 = 0; & i) \quad & 9y^2x^2 - y^2 + 6x = 0; \\
 d) \quad & (y^2 - 1)(x - 3) = 6; & j) \quad & 4y^2x^2 - 16y^2 - 4x = 0; \\
 e) \quad & x^2y - 2x^2 - y - 2 = 0; & k) \quad & x^2y + 4xy - x^2 + x + 4y - 6 = 0. \\
 f) \quad & y^2x^2 - 2y^2 - 4x = 0;
 \end{aligned}$$