

3.5 Movimento retilíneo e a Derivada como Taxa de Variação

A derivação de uma função em um determinado ponto tem outra importante interpretação, como sendo a *Taxa de Variação Instantânea* de uma função no ponto.

Para um caso particular, considere que uma partícula está em movimento retilíneo, ou seja, está se movendo ao longo de uma reta. Adote para a reta o sentido positivo e negativo. Escolha um ponto da reta para ser a origem. Seja f a função que determina a distância orientada da partícula a partir da origem em qualquer tempo t . Então, se s unidades de comprimento é a distância orientada da partícula a partir da origem, temos que $s = f(t)$. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.5.1 *Seja $s = t^2 + 2t - 3$ uma equação do movimento retilíneo para uma determinada partícula, então, temos que:*

- a) $s(0) = -3$, ou seja, no tempo $t = 0$ a partícula está a 3 u.c. à esquerda da origem;
- b) $s(1) = 0$, ou seja, no tempo $t = 1$ a partícula está na origem;
- c) $s(2) = 5$, ou seja, no tempo $t = 2$ a partícula está a 5 u.c. à direita da origem.

■

No Exemplo 3.5.1 é possível observar que a velocidade não é constante e, por isto, não é possível retirar informações relevantes sobre o movimento em um determinado tempo t_0 específico. Sendo assim, para um tempo t_0 , temos que $s_0 = f(t_0)$. Logo, a variação da distância orientada a partir da origem é de $(s - s_0)$ u.c., no intervalo de tempo $(t - t_0)$ u.t.. Portanto, a velocidade média da partícula, neste intervalo de tempo, é dada por

$$V_m = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \frac{\text{u.c.}}{\text{u.t.}}.$$

Logo, quanto mais próximo t tiver de t_0 , mais próximo a velocidade média vai estar da velocidade instantânea. Observe que o valor da velocidade média é dado por um quociente similar ao da definição de derivada e, por isto, vamos tomara a definição a seguir.

Definição 3.5.1 *Se $s = s(t)$ é a equação de movimento de uma partícula, que se move ao longo de uma reta orientada a partir de um ponto fixo t_0 em t unidades de tempo, então, a **Velocidade Instantânea** da partícula é dada por*

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \frac{\text{u.c.}}{\text{u.t.}},$$

se o limite existir.

■

Em outras palavras, a velocidade instantânea de uma partícula no movimento retilíneo é igual a derivada da função espaço percorrido no tempo desejado, ou seja,

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt}(t).$$

Vamos a um exemplo.

Exemplo 3.5.2 Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação

$$s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1.$$

Determine os intervalos de tempo nos quais a partícula se move para à direita e para à esquerda. Determine também o instante no qual ela inverte o sentido do movimento.

Solução: A partícula vai estar se movendo para a esquerda, quando a velocidade for negativa e a partícula está se movendo para a direita quando a velocidade for positiva. Além disso, o ponto de inversão do movimento da partícula é no momento que a mesma está em repouso, ou seja, quando a velocidade é zero. Assim, como

$$\begin{aligned} s'(t) = 6t^2 - 8t + 2, \text{ então: } s'(t) = 0 &\Leftrightarrow 6t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ ou } t = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Portanto:

- se $t < \frac{1}{3}$ e se $t > 1$ a partícula está se movendo para a direita pois, nesses casos, $v > 0$.
- se $\frac{1}{3} < t < 1$, segue que a partícula está se movendo para a esquerda pois, neste caso, $v < 0$.
- se $t = 1$ ou $t = \frac{1}{3}$, temos a inversão do movimento pois, nesses casos, a partícula está em repouso.

■

A velocidade no movimento retilíneo é um caso particular de um conceito mais geral, que é o conceito de *Taxa de Variação Instantânea*. De uma maneira mais geral, se uma quantidade y é uma função de uma quantidade x , podemos expressar a taxa de variação de y , por unidade de variação de x , como na definição a seguir.

Definição 3.5.2 Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e considere $y = f(x)$. A **Taxa de Variação Instantânea** de y , por unidade de variação de x em a , equivale a derivada da função f em relação a x aplicada em a , ou seja,

$$TV(y) = f'(a).$$

■

Vejamos um exemplo, Em seguida são aprestados alguns exercícios. Bons estudos.

Exemplo 3.5.3 Seja $v(x)$ cm^3 o volume de um cubo com x cm de arestas. Qual é a taxa de variação instantânea de $v(x)$, quando $x = 3$?

Solução: Temos que a taxa de variação instantânea é dada pela derivada da função no ponto. Então,

$$TV_{V(3)} = \frac{d(V(x))}{dx}(3) = \frac{d(x^3)}{dx} \Big|_{x=3} = (3x^2) \Big|_{x=3} = 3 \cdot (3^2) = 27.$$

Portanto, V varia 27 cm^3 por cada unidade de variação de x .

■

3.6 Exercícios

Exercício 3.6.1 Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t s. Ache a velocidade instantânea $v(t)$ cm/s em t s então ache $v(t_0)$, para o ponto t_0 indicado.

a) $s = 3t^2 + 1$, em $t_0 = 3$;

e) $s = 2t^3 - t^2 + 5$, em $t_0 = -1$;

b) $s = 8 - t^2$, em $t_0 = 5$;

f) $s = 4t^3 + 2t - 1$, em $t_0 = \frac{1}{2}$;

c) $s = \frac{1}{4t} + 1$, em $t_0 = \frac{1}{2}$;

g) $s = \frac{2t}{4+t}$, em $t_0 = 0$;

d) $s = \frac{3}{t^2} + 1$, em $t_0 = -2$;

h) $s = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}$, em $t_0 = 2$.

Exercício 3.6.2 Uma partícula se move ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t s. A direção positiva da reta é à direita. Determine os intervalos onde a partícula se move para a direita e para a esquerda. Determine também quando a partícula inverte o sentido do movimento.

a) $s = t^3 + 3t^2 - 9t + 4$; c) $s = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 2t + 4$; e) $s = \frac{t}{9+t^2}$;

b) $s = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$; d) $s = \frac{t}{1+t^2}$; f) $s = \frac{t+1}{4+t^2}$.

Exercício 3.6.3 Se $A(x)$ cm² é a área de um quadrado e x cm é a medida do comprimento de cada lado, ache a taxa de variação da medida de $A(x)$ em relação a x , quando x varia de (a) 4,0 a 4,6; (b) 4,0 a 4,3; (c) 4,0 a 4,1; (d) 4,0 a 4,05; (e) Qual da taxa de variação instantânea de variação de $A(x)$ com relação a x , quando x vale 4,0.