## 3.7 Rotacional de um Campo Vetorial

Nas seções anteriores estudamos dois novos operadores o gradiente (que partia de uma função escalar e chegava numa função vetorial) e o divergente (que saia de uma função vetorial e chegava numa função escalar). Nessa seção definiremos um novo operador, que parte de uma função vetorial e nos fornece outra função vetorial. A ideia desse operador está relacionada com um produto vetorial, logo vamos defini-la apenas para domínios em $\mathbb{R}^3$, ou seja, para funções vetoriais $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

**Definição 3.7.1** *Seja $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial definido por*

$$\vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)),$$

*sendo que $\vec{f}$ possui as derivadas de $1^a$ ordem contínuas em $D$. Definimos o Rotacional de $\vec{f}$, denotado por $rot(\vec{f})$, como sendo o vetor*

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

*ou seja,*

$$rot(\vec{f}) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Em outras palavas, o rotacional de uma função $\vec{f}$ pode ser visto como sendo o "produto vetorial" do operador $\nabla$ com a função $\vec{f}$. Vamos aos exemplos.

**Exemplo 3.7.1** *Determine o rotacional da função $\vec{f}$, sabendo que $\vec{f}(x, y, z) = (xzy^2, xyz, 3xy)$.*

**Solução:** Temos que o rotacional de $\vec{f}$ é dado por $\nabla \times \vec{f}$ e, por isso,

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xzy^2 & xyz & 3xy \end{vmatrix} = (3x - xy, xy^2 - 3y, yz - 2xyz).$$

■

**Exemplo 3.7.2** *Determine o rotacional da função $\vec{f}$, sabendo que $\vec{f}(x, y, z) = (xy, yz^2, xyz)$.*

**Solução:** Temos que o rotacional de $\vec{f}$ é dado por $\nabla \times \vec{f}$ e, por isso,

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz^2 & xyz \end{vmatrix} = (xz - 2yz, 0 - yz, 0 - x) =$$

$$= ((x - 2y)z, -yz, -x).$$

■

**Exemplo 3.7.3** *Determine o rotacional da função $\vec{f}$, sabendo que $\vec{f}(x,y,z) = cos(xy)\vec{i} - sen(xy)\vec{k}$.*

**Solução:** Temos que o rotacional de $\vec{f}$ é dado por $\nabla \times \vec{f}$ e, por isso,

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ cos(xy) & 0 & -sen(xy) \end{vmatrix} =$$

$$= (-xcos(xy), ycos(xy), -xsen(xy)).$$

■

**Exemplo 3.7.4** *Seja $\vec{f}(x,y) = Q(x,y)\vec{j}$. Suponha que para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tenhamos $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.*

*a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.*

*b) Calcule $rot(\vec{f})$.*

**Solução:**

a) Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, segue que $Q(x,y)$ não depende de $x$, isto é, $Q(x,y) = F(y)$. Dessa forma, $Q$ é constante sobre qualquer reta paralela ao eixo $x$. Um exemplo de um campo que satisfaz essa condição fica dado pela Figura 3.12.

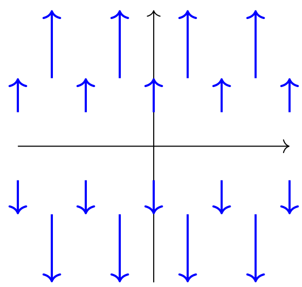

Figura 3.12: Representação de um campo vetorial que satisfaz as condições do Exemplo 3.7.4.

b) Temos que o rotacional de $\vec{f}$ é dado por $\nabla \times \vec{f}$ e, por isso,

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \vec{0},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

■

**Exemplo 3.7.5** *Seja* $\vec{f}(x,y) = Q(x,y)\vec{j}$*. Suponha que para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, tenhamos* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) > 0$*.*

*a) Desenhe um campo satisfazendo as condições dadas.*

*b) Calcule* $rot(\vec{f})$*.*

**Solução:**

a) Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, segue que $Q(x,y)$ é estritamente crescente na direção do eixo $x$ e, por isso, sobre qualquer reta paralela ao eixo $x$ temos que $Q$ é crescente. Um exemplo de um campo que satisfaz essa condição fica dado pela Figura 3.12.

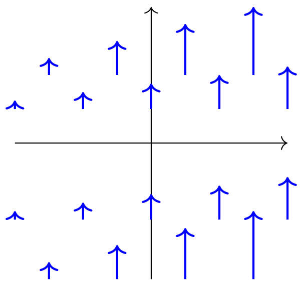

Figura 3.13: Representação de um campo vetorial que satisfaz as condições do Exemplo 3.7.5.

b) Temos que o rotacional de $\vec{f}$ é dado por $\nabla \times \vec{f}$ e, por isso,

$$rot(\vec{f}) = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) > \vec{0},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

■

**Observação 3.7.1** *Da mesma forma que para o divergente de uma função, podemos provar que são válidas as seguintes propriedades: sejam* $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ *e* $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$ *funções vetoriais definidas em um domínio* $D$ *cujas derivadas parciais de* $1^a$ *ordem existam e seja* $h$ *uma função escalar diferenciável em* $D$*. Então:*

*a)* $rot(\vec{f} \pm \vec{g}) = rot(\vec{f}) \pm rot(\vec{g})$*;*

*b)* $rot(h\vec{f}) = hrot(\vec{f}) + \nabla h \times \vec{f}$*.*

## Interpretação Física do Rotacional

Considere um fluido em escoamento bidimensional com campo de velocidade dado por $\vec{v}(x,y) = Q(x,y)\vec{j}$, sendo $\vec{v}(x,y)$ a velocidade com que uma partícula do fluido passa pelo ponto $(x,y)$. Nessa situação, a trajetória descrita pelas partículas são retas paralelas ao eixo $y$, como ilustrado no Exemplo 3.7.5. Suponha que $rot(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Nessas condições é "razoável" esperar que pequenos discos sobre o fluido gire à medida que ele se desloca sobre o fluido.

Agora, considere um fluido em escoamento bidimensional com campo de velocidade dado por $\vec{v}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, sendo $P$ e $Q$ de classe $C^1$, vamos obter uma interpretação para a componente $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ do $rot(\vec{v})$.

Sejam $A$ e $B$ duas partículas do fluido e suponha que num instante $t_0$ elas ocupem as posições $(a,b)$ e $(a+h,b)$, respectivamente, com $h > 0$. Sejam $A(t)$ e $B(t)$ as posições ocupadas pelas partículas num instante $t$ qualquer. Seja $\theta_h(t)$ o ângulo, medido em radianos e no sentido anti-horário, que o segmento de extremidade $\overline{A(t)B(t)}$ forma com o segmento de extremidade $\overline{A(t_0)B(t_0)}$, como ilustrado na Figura 3.14.

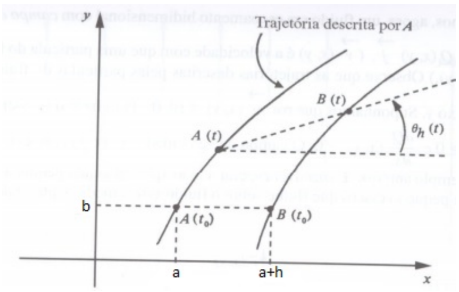


Figura 3.14: Ilustração usada na interpretação física do rotacional.

Considere $A(t) = (x_1(t), y_1(t))$ e $B(t) = (x_2(t), y_2(t))$. Considere também $\delta(t)$ como sendo a distância entre $A(t)$ e $B(t)$. Dessa forma, temos que $\delta(t_0) = h$. Assim, da Figura 3.15, temos que

$$\delta(t)sen(\theta_h(t)) = y_2(t) - y_1(t).$$

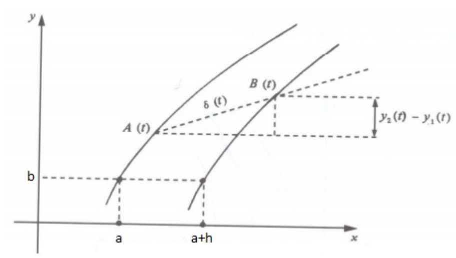


Figura 3.15: Ilustração usada na interpretação física do rotacional.

Derivando em relação a $t$ obtemos

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}(t)sen(\theta_h(t)) + \delta(t)cos(\theta_h(t))\frac{\partial \theta_h}{\partial t}(t) = \frac{\partial y_2}{\partial t}(t) - \frac{\partial y_1(t)}{\partial t}.$$

Observe que no instante $t_0$ temos que $\theta_h(t_0) = 0$, $\delta(t_0) = h$, $\dfrac{\partial y_2}{\partial t}(t_0) = Q(a+h,b)$ e $\dfrac{\partial y_1(t_0)}{\partial t} = Q(a,b)$. Assim,

$$\frac{\partial \theta_h}{\partial t}(t) = \frac{Q(a+h,b) - Q(a+h,b)}{h},$$

que é a *Velocidade Angular* do segmento de extremidades $A(t)$ e $B(t)$, no instante $t = t_0$. Assim, para $h > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\frac{\partial \theta_h}{\partial t}(t_0) \approx \frac{\partial Q}{\partial x}(a,b).$$

Observe que se o movimento é rígido, ou seja, se a distância entre as partículas se mantém constante durante o movimento, e se o mesmo possui velocidade angular $\omega$, então, para todo $h > 0$, segue que

$$\omega = \frac{\partial \theta_h}{\partial t}(t) = \frac{\partial Q}{\partial x}(a,b).$$

De uma maneira análoga, para uma partícula $C$ que no instante $t_0$ ocupe a posição $C(t_0) = (a, b+k)$, considerando $\phi_k(t)$ como sendo o ângulo entre $\overline{A(t_0)C(t_0)}$ forma com o segmento de extremidade $\overline{A(t)C(t)}$, como visto na Figura 3.16, temos que

$$\omega = \frac{\partial \phi_k}{\partial t}(t_0) \approx -\frac{\partial P}{\partial y}(a,b).$$

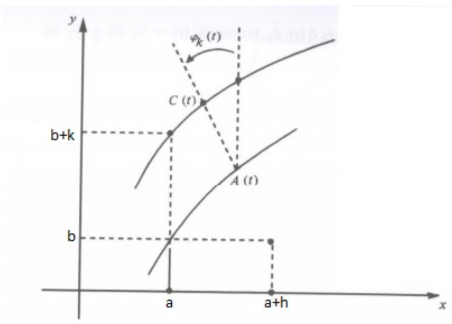


Figura 3.16: Ilustração usada na interpretação física do rotacional.

Portanto, para $h$ e $k$ suficientemente pequenos, a soma das velocidades angulares no instante $t_0$, dos segmentos de extremidades $(A(t), B(t))$ e $(A(t), C(t))$ fica dada por

$$w = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(a,b) - \frac{\partial P}{\partial y}(a,b)\right].$$

**Observação 3.7.2** *Sobre o rotacional, é possível verificar a sua aplicação em diversas situações da físicas, tais como:*

*a) Na análise de campos de velocidade na Mecânica de Fluidos;*

*b) Na análise de campos de forças eletromagnéticas;*

c) *Como sendo a medida do movimento angular de um fluido, e a condição* $rot(\vec{v}) = \vec{0}$ *para um campo de velocidade* $\vec{v}$ *caracterizando os chamados Fluxos Irrotacionais;*

d) *A equação* $rot(\vec{E}) = \vec{0}$*, onde* $\vec{E}$ *é a força elétrica, indica que somente forças eletrostáticas estão presentes no campo elétrico.*

No nosso estudo utilizaremos o rotacional de um campo vetorial para verifica se o mesmo é, ou não, um campo conservativo. Vamos a alguns exemplos de aplicações do rotacional.

**Exemplo 3.7.6** *Um corpo rígido gira em torno de um eixo que passa pela origem do sistema de coordenadas, com vetor velocidade angular* $\vec{\omega}$ *constante. Seja* $\vec{v}$ *o vetor velocidade em um ponto* $P$ *do corpo. Calcule* $rot(\vec{v})$*.*

**Solução:** A Figura 3.17 ilustra a situação descrita no exemplo.

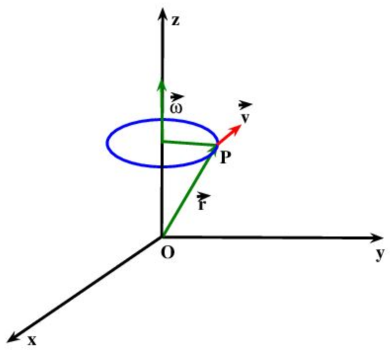


Figura 3.17: Representação dos vetores $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$, descrita no Exemplo 3.7.6

Da física, sabemos que o vetor velocidade de um ponto $P$ do corpo é dado pelo produto vetorial do vetor velocidade angular com o vetor posição, ou seja,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Então, considerando $\vec{\omega} = (a, b, c)$ o vetor velocidade constante e $\vec{r} = (x, y, z)$ como sendo o vetor posição, teremos que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} = (bz - cy, cx - az, ay - bx).$$

Portanto, como o rotacional de um campo é dado por $\nabla \times \vec{v}$, segue que

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{bmatrix} = (a + a, b + b, c + c) = 2\vec{\omega}.$$

■

**Exemplo 3.7.7** *Um escoamento é representado pelo campo de velocidade*

$$\vec{v} = 10x\vec{i} - 10y\vec{j} + 30\vec{k}.$$

*Verifique se o escoamento é um possível escoamento incompressível e se ele é um possível escoamento irrotacional.*

**Solução:** Temos que um escoamento é um possível escoamento incompressível se $div(\vec{v}) = 0$. Assim, como

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial(10x)}{\partial x} + \frac{\partial(-10y)}{\partial y} + \frac{\partial(30)}{\partial z} = 0,$$

temos que o escoamento é um possível escoamento incompressível. Por outro lado, um escoamento é um possível escoamento irrotacional se $rot(\vec{v}) = \vec{0}$. Dai, como

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 10x & -10y & 30 \end{bmatrix} = (0,0,0) = \vec{0},$$

segue que o escoamento é um possível escoamento irrotacional. ■

**Exemplo 3.7.8** *O campo eletrostático associado a uma carga positiva $Q$ é dado por $\vec{E} = -\nabla V$, onde $V = \dfrac{Q}{r}$, sendo que $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Verifique se $rot(\vec{E}) = 0$.*

**Solução:** Observe que $\vec{E} = \left(\dfrac{Qx}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}}, \dfrac{Qy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}}, 0\right)$ e, por isto,

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{Qx}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}} & \dfrac{Qy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(0, 0, \frac{3Qxy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}} - \frac{3Qxy}{(\sqrt{x^2+y^2})^{3/2}}\right) = \vec{0}.$$

em todos os pontos fora da origem. Portanto, $rot(\vec{E}) = 0$. ■

Vamos agora praticar com alguns exercícios...... Bons estudos......

## 3.8 Exercícios

**Exercício 3.8.1** *Encontre o rotacional de cada campo vetorial abaixo e decida se o campo é, ou não, um campo rotacional.*

a) $\vec{f}(x,y,z) = (xz, xyz, -y^2)$;

b) $\vec{f}(x,y,z) = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$;

c) $\vec{f}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$;

d) $\vec{f}(x,y,z) = (xyz, 2x-1, x^2z)$;

e) $\vec{f}(x,y,z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$;

f) $\vec{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$;

g) $\vec{f}(x,y,z) = (-y, x, z)$;

h) $\vec{f}(x,y,z) = (x, y, xz)$;

i) $\vec{f}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$;

j) $\vec{f}(x,y,z) = (2x + \cos(yz), -xzsen(yz), -xysen(yz))$;

k) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, *para* $(x,y) \neq (0,0)$;

l) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, *para* $(x,y) \neq (0,0)$.

**Exercício 3.8.2** *Sabendo que* $f = 2x^3yz$ *e* $\vec{v} = (x^3, xz, sen(x))$, *encontre* $\vec{a} = \nabla f + rot(\vec{v})$ *e* $\vec{b} = rot(f\vec{v})$.

**Exercício 3.8.3** *Sabendo que* $\vec{u} = (2xz, x^2-z^2, x^2+2z)$, *encontre* $rot(rot(\vec{u}))$.

**Exercício 3.8.4** *Mostre que se* $f(z,y,z)$ *é solução da equação de Laplace,* $\nabla f$ *é um campo vetorial que é ao mesmo tempo solenoidal e irrotacional.*

**Exemplo 3.8.1** *Considere o campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = -\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^2}$, *onde* $\vec{r} = (x,y)$. *Represente geometricamente o campo* $\vec{f}$ *e, além disso, mostre que ele é um campo irrotacional.*

**Exercício 3.8.5** *Considere um fluido em escoamento bidimensional com campo de velocidade* $\vec{v}(x,y) = (-y,x)$. *Calcule* $rot(\vec{v})$ *e o interprete.*

**Exercício 3.8.6** *Considere o escoamento bidimensional na região* $\Re = [-3,3] \times \mathbb{R}$ *com campo de velocidade dado por* $\vec{v}(x,y) = \left(1 - \dfrac{x^2}{9}\right)\vec{j}$. *Desenhe o campo de velocidade e decida se o escoamento é irrotacional.*