3.5 Divergência de um Campo Vetorial

O primeiro operador que estudamos na Seção 3.3 foi o gradiente de um campo escalar. Assim, aplicando o operador ∇ a um campo escalar, obtemos um vetor formado pelas derivadas parciais de primeira ordem da função. Agora introduziremos um segundo operador, que diferentemente do gradiente, ele está relacionado com campos vetoriais, chamado de *Divergente* ou *Divergência*.

Definição 3.5.1 *Seja $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo vetorial dado por $\vec{f}(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \cdots, f_n(\omega))$. Se as derivadas de primeira ordem $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ existem e são contínuas, então, definimos a Divergência do campo vetorial $\vec{f}$, denotado por $div(\vec{f})$, pela função escalar*

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Como comentamos no início dessa seção, podemos definir um novo operador, chamado de operador Nabla, dado por $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Dessa forma, sendo a função vetorial $\vec{f}$ dada por $\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, podemos reescrever o $div(\vec{f})$ com a notação de produto escalar, dado por:

$$div(\vec{f}) = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Observação 3.5.1 *a) Observe que o operador ∇ não é uma função e, por isso, não estamos fazendo um produto escalar entre ∇ e $\vec{f}$, apesar de queremos induzir a ideia da operação.*

b) Em alguns livros usa-se a notação $\nabla \ldots \vec{f}$ para o divergente de um campo vetorial $\vec{f}$.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1 *Dado o campo vetorial $\vec{f}(x,y,z) = (2x^4, e^{xy}, xyz)$, calcule $div(\vec{f})$.*

Solução: Temos que

$$div(\vec{f}) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 8x^3 + xe^{xy} + xy.$$

■

Exemplo 3.5.2 *Dado o campo vetorial*

$$\vec{g}(x,y,z) = (\cos^4(xyz), ln(x^2y^2z^2), 5x^2 - 4y^3 + 3z^3),$$

calcule $div(\vec{g})$.

Solução: Temos que

$$div(\vec{g}) = \frac{\partial}{\partial x}(\cos^4(xyz)) + \frac{\partial}{\partial y}(ln(x^2y^2z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(5x^2 - 4y^3 + 3z^3) =$$

$$= -4yz\text{sen}(xyz)\cos^3(xyz) + \frac{2}{z} + 9z^2.$$

■

Utilizando a definição de divergente e as propriedades de derivadas parciais de funções, podemos provar que são válidas algumas propriedades envolvendo o divergente de uma função.

Observação 3.5.2 *Sendo $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais e sendo $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar diferenciável em D, se $div(\vec{f})$ e $div(\vec{g})$ existem, então, segue que:*

a) $div(\vec{f} \pm \vec{g}) = div(\vec{f}) \pm div(\vec{g})$; *b) $div(h\vec{f}) = hdiv(\vec{f}) + \nabla h \cdot \vec{f}$.*

Agora vamos definir outro operador importante na matemática. Para isto, suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existam. Então, é possível determinar o $div(grad(f))$. Como

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

segue que

$$div(grad(f)) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Ou seja,

$$div(grad(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Portanto, definindo o operador $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ temos que

$$div(grad(f)) = \nabla^2 f.$$

Definição 3.5.2 *O operador diferencial ∇^2 é chamado de Laplaciano. A equação*

$$\nabla^2 f = 0$$

é chamada de Equação de Laplace.

O operador Laplaciano é muito utilizado no mundo real, principalmente no estudo de equações diferenciais.

Exemplo 3.5.3 *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *o campo escalar dado por* $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xyz + 273$. *Dessa forma, como* $\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + xyz + 273) = 2x + yz$, $\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + xyz + 273) = -2y + xz$ *e* $\frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2 + xyz + 273) = xy$, *segue que*

$$\nabla^2 f(P) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + yz) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y + xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 2 + (-2) = 0,$$

ou seja, o campo escalar $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + xyz + 273$ *satisfaz a Equação de Laplace.*

Agora, vamos falar de uma interpretação física para o divergente.

Interpretação Física do Divergente

Na Mecânica dos Fluidos, encontramos uma equação importante, chamada de Equação da Continuidade. Essa equação é definida por

$$div(\vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

onde $\vec{u} = \rho\vec{v}$, sendo $\rho = \rho(x,y,z,t)$ a densidade do fluido que depende da posição e do tempo e $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$ o vetor velocidade, também dependente da posição e do tempo. Reescrevendo a equação da continuidade, temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(\vec{u}).$$

Logo, a divergência de um campo vetorial pode ser visto como uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto. Assim, quando a divergência é positiva em um ponto do fluido, a sua densidade está diminuindo com o passar do tempo. Nesse caso, dizemos que o fluido está *Expandindo* (ou que existe uma *Fonte* de fluxo no ponto). Caso a divergência seja negativa, o líquido está *Contraindo* e, por isso, a densidade do líquido estará aumentando com o passar do tempo. Por outro lado, se a divergência é zero em todos os pontos de uma região, então, temos que o fluxo de entrada na região é exatamente equilibrado pelo fluxo de saída. Logo, o fluxo não é criado nem destruído, ou seja, não existe fonte nem semi-douro na região.

Assim, se a densidade de um líquido dada por uma função é constante em relação ao tempo, então, temos que a equação da continuidade fica dada por $div(\vec{v}) = 0$, e o campo vetorial $\vec{v}$ é chamado de *Campo Solenoidal*. Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.5.4 *Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade* $\vec{v} = x\vec{j}$. *Mostre que todas as partículas se deslocam em linha reta e que o campo de velocidade dado representam um possível escoamento incompressível.*

Solução: Um fluido incompressível tem o fluxo de entrada igual ao fluxo de saída e, por isto, o fluido será incompressível se $div(\vec{v}) = 0$. Dessa forma, como

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, segue que o campo velocidade representa um possível escoamento incompressível. Por outro lado, uma representação gráfica do campo vetorial $\vec{v}$ fica dada pela Figura 3.11.

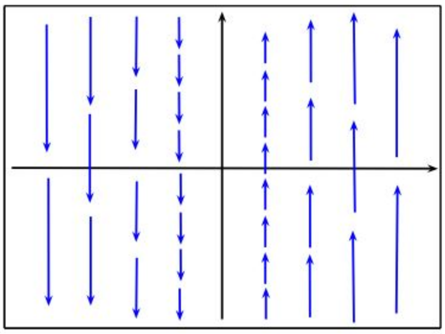

Figura 3.11: Representação do campo vetorial $\vec{v} = (0, x, 0)$.

Como os vetores velocidades estão todos apontando na mesma direção, segue que o movimento das partículas é linear, pois caso contrário, os vetores velocidades apontariam para direções diferentes. Portanto, o líquido se desloca em linha reta. ∎

Exemplo 3.5.5 *Um campo de escoamento compressível é descrito por*

$$\vec{u}(x, y, t) = \rho(x, y, t)\vec{v}(x, y, t) = (2xe^{-t}, -xye^{-t}),$$

onde x e y são as coordenadas do vetor posição (dadas em metros), t é a coordenada que representa o tempo (em segundos), ρ representa a densidade e $\vec{v}$ representa a velocidade (dados em kg/m^3 e m/s, respectivamente). Calcule a taxa de variação da densidade ρ em relação ao tempo, no ponto $P(3, 2)$ e com $t = 0$.

Solução: Temos que a derivada da densidade, em relação ao tempo, é dada pela equação da continuidade, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{u}.$$

Por isso, como a taxa de variação da densidade em relação ao tempo é igual ao valor da derivada parcial da densidade em relação ao tempo, segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(P^*) = -(2e^{-t} - xe^{-t} + 0)|_{P^*} = -(2 - 3) = 1kg/m^3s,$$

onde $P^*(x, y, t) = (3, 2, 0)$. ∎

Exemplo 3.5.6 *Para um escoamento no plano XY, a componente em y da velocidade é dada por $y^2 - 2x + 2y$. Determine uma possível componente em x para que o escoamento seja um possível escoamento incompressível.*

Solução: Para que um escoamento no plano XY seja incompressível, é necessário que $div(\vec{v}) = 0$, onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade e o mesmo tem que ser dado por $\vec{v} = (v_1, y^2 - 2x + 2y)$. Assim, temos que

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2y + 2 = 0.$$

Dessa forma, precisamos que $\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -2y - 2$ e, por isso, $v_1 = \int(-2y-2)dx + a(y) = -2xy - 2x + a(y)$, sendo $a(y)$ uma função qualquer em y. ■

Exemplo 3.5.7 *Quando uma função escalar $fx, y, z)$ tem derivadas de segunda ordem contínuas e sendo $div(\nabla(f)) = 0$ num domínio, segue que f é chamada de Função Harmônica nesse domínio. Verifique se as seguintes funções são harmônicas:*

a) $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$*;*

b) $f(x, y, z) = 2xy + yz$*;*

Solução: Uma função escalar é harmônica se, e somente se, a função f satisfaz a equação de Laplace. Assim:

a) como $\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2 + e^y, -1) \Rightarrow \nabla^2 f = 2y + e^y \neq 0$, segue que a função $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$ não é uma função harmônica.

b) Como $\nabla f(x, y, z) = (2y, 2x + z, y) \Rightarrow \nabla^2 f = 0$ e f é um polinômio (f tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem), segue que a função $f(x, y, z) = x^2y + e^y - z$ é uma função harmônica.

■

Observação 3.5.3 *Da equação da continuidade, temos que*

$$div(\vec{u}) = div(\rho\vec{v}) = \rho div(\vec{v}) + \nabla\rho\vec{v}.$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação da continuidade por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot div(\vec{v}) + \nabla\rho \cdot \vec{v} = 0.$$

3.6 Exercício

Exercício 3.6.1 *Dado o campo vetorial $\vec{f}$, encontre $div(\vec{f})$.*

a) $\vec{f}(x,y) = (2x^4, e^{xy})$;

b) $\vec{f}(x,y) = (sen^2(x), 2cos(x))$;

c) $\vec{f}(x,y,z) = (2x^2y^2, 3xyz, y^2z)$;

d) $\vec{f}(x,y,z) = (ln(xy), x, z)$;

e) $\vec{f}(x,y,z) = (2x+4z, y-z, 3x-yz)$

f) $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$;

g) $\vec{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$;

h) $\vec{f}(x,y) = (e^x\cos(y), e^x sen(y))$;

i) $\vec{f}(x,y,z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$;

j) $\vec{f}(x,y,z) = (xy^2z, 2xy^2z, 3xy^2z)$;

k) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, *para* $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercício 3.6.2 *Sendo* $\vec{u} = (x^2-y^2).\nabla(f)$, *calcule* $div(\vec{u})$ *no ponto* $P = (1,2,3)$, *sabendo que* $f(x,y,z) = sen(xy) + z$.

Exercício 3.6.3 *Sendo* $\vec{u} = (x^2-y^2).\nabla(f)$, *calcule* $div(\vec{u})$ *no ponto* $P = (-1,2,-1)$, *sabendo que* $f(x,y,z) = xyz + 2xy$.

Exercício 3.6.4 *Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade* $\vec{v}$ *dada. Verifique se* $\vec{v}$ *representa um possível fluxo incompressível.*

a) $\vec{v}(x,y,z) = (z^2, x, y^2)$;

b) $\vec{v}(x,y,z) = (2, x, -1)$;

c) $\vec{v}(x,y) = (2xy, x)$;

d) $\vec{v}(x,y) = (2y-3, x^2)$;

e) $\vec{v}(x,y) = (-y, x)$;

f) $\vec{v}(x,y,z) = (2xz, -2yz, 2z)$.

Exercício 3.6.5 *Verifique se as seguintes funções são harmônicas em algum domínio* D.

a) $f(x,y,z) = yz + \ln(xy)$;

b) $f(x,y) = 2(x^2-y^2) + y + 10$;

c) $f(x,y) = sen(x)\cosh(y)$;

d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$;

e) $f(x,y,z) = x^2 - \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{2}$;

f) $f(x,y,z) = x+y+z$;

g) $f(x,y) = e^x\cos(y)$.

Exercício 3.6.6 *Mostre que a função* $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ *é uma função harmônica.*

Exercício 3.6.7 *Prove que o campo vetorial* $\vec{v}(x,y,z) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, *com* $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, *é um campo solenoidal fora da origem.*