2.5 Derivadas Parciais de Funções Vetoriais

Estudando funções vetoriais de uma variável pudemos perceber a semelhança com as funções escalares. Agora, estamos estendendo a ideia para funções vetoriais de várias variáveis. Aqui, vamos estender a noção de *Diferenciabilidade de Funções Vetoriais de Várias Variáveis*, começando com a definição de Derivada Parcial de Funções Vetoriais.

Definição 2.5.1 *Considere uma função vetorial $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. A* Derivada Parcial *de $\vec{f}$ em relação a variável x_i, denotada por $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$ (ou por $\vec{f}_i$), é definida por*

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{f}(x_1, \cdots, x_i + \Delta x_i, \cdots, x_n) - \vec{f}(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\Delta x_i},$$

para todos os pontos $(x_1, \cdots, x_n) \in D$, tais que o limite exista.

Observação 2.5.1 *a) Pela definição de derivada parcial para funções vetoriais de várias variáveis, pela operações com vetores e as propriedades envolvendo soma e limite de funções, temos que a derivada parcial de uma função vetorial de várias variáveis é obtida pela derivada parcial de cada uma das funções coordenadas de $\vec{f}$ em relação a variável desejada.*

b) Para uma função vetorial $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, digamos

$$\vec{f}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k},$$

temos que as derivadas parciais ficam dadas por:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{f_1}}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial x}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial \vec{f_3}}{\partial x}(x, y, z)\vec{k};$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{f_1}}{\partial y}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial \vec{f_3}}{\partial y}(x, y, z)\vec{k}; \quad e$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \vec{f_1}}{\partial z}(x, y, z)\vec{i} + \frac{\partial \vec{f_2}}{\partial z}(x, y, z)\vec{j} + \frac{\partial \vec{f_3}}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.5.1 *Dada a função vetorial*

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^3 + 4y^2 - 3z^3, \sqrt{x + y + z}, sen(xy^2 z)),$$

determine as suas derivadas parciais.

Solução: Vamos obter primeiro a derivada parcial em relação a variável x, ou seja, vamos obter $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$.

Temos que $f_1(x,y,z) = x^3 + 4y^2 - 3z^3$, logo $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2$. Ainda temos que $f_2(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$ e, por isto, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}$. Por fim, temos que $f_3(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy^2z)$, consequentemente, $\dfrac{\partial f_3}{\partial x} = y^2z\cos(xy^2z)$.

Portanto, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 3x^2\vec{i} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}\vec{j} + y^2z\cos(xy^2z)\vec{k}$.

Para o cálculo de $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}$, observe que $f_1(x,y,z) = x^3 + 4y^2 - 3z^3$. Então, $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = 8y$. Para a segunda função coordenada, $f_2(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$. Logo, $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}$. Por fim, temos que $f_3(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy^2z)$ e, desta forma, $\dfrac{\partial f_3}{\partial y} = 2xyz\cos(xy^2z)$.

Portanto, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y} = 8y\vec{i} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}\vec{j} + 2xyz\cos(xy^2z)\vec{k}$.

Por fim, para $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z}$, como $f_1(x,y,z) = x^3 + 4y^2 - 3z^3$ segue que $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = -9z^2$. Ainda, como $f_2(x,y,z) = \sqrt{x+y+z}$, temos que $\dfrac{\partial f_2}{\partial z} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}$. Por último, como $f_3(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy^2z)$, temos que $\dfrac{\partial f_3}{\partial z} = xy^2\cos(xy^2z)$.

Portanto, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z} = -9z^2\vec{i} + \dfrac{1}{2\sqrt{x+y+z}}\vec{j} + xy^2\cos(xy^2z)\vec{k}$. ■

Exemplo 2.5.2 *Dada a função vetorial* $\vec{f}(x,y,z) = \sqrt{x}\vec{i} + xyz^2\vec{j} + 4e^{yz}\vec{k}$, *determine suas derivadas parciais.*

Solução: Temos três derivadas parciais. Vamos obter a primeira. Temos que $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x}, \dfrac{\partial f_3}{\partial x}\right)$. Logo, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, yz^2, 0\right)$.

Para a segunda derivada parcial, como $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}, \dfrac{\partial f_2}{\partial y}, \dfrac{\partial f_3}{\partial y}\right)$, segue que $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x,y,z) = \left(0, xz^2, 4ze^{yz}\right)$.

Por fim, para a terceira derivada parcial, como $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial z}, \dfrac{\partial f_2}{\partial z}, \dfrac{\partial f_3}{\partial z}\right)$, segue que $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z}(x,y,z) = (0, 2xyz, 4ye^{yz})$. ■

Exemplo 2.5.3 *Dada a função vetorial* $\vec{f}(u,v) = (ue^v, u^2v)$, *determine* $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u}$ *no ponto* $(2,0)$ *e* $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v}$ *no ponto* $(-1,1)$.

Solução: Observe que

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(2,0) = (e^v, 2uv)|_{(2,0)} = (e^0, 2.2.0) = (1,0)$$

e

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(-1,1) = \left(ue^v, u^2\right)\Big|_{(-1,1)} = (-1.e^1, (-1)^2) = (-e, 1).$$

■

Exemplo 2.5.4 *Dada a função vetorial* $\vec{f}(u,v) = (u\cos(v), usen(v), v)$*, determine* $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u}$ *e* $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v}$*.*

Solução: Temos que

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u,v) = (\cos(v), \text{sen}(v), 0) \text{ e } \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u,v) = (-u\text{sen}(v), u\cos(v), 1)\,.$$

■

Exemplo 2.5.5 *Dada a função vetorial*

$$\vec{f}(x,y,t) = (xcos(t) - ysen(t), xsen(t) + ycos(t))\,,$$

determine $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ *e* $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial t}$*.*

Solução: Temos que

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}(x,y,t) = (cos(t), sen(t))\,,$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}(x,y,t) = (-sen(t), cos(t)) \text{ e}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(x,y,t) = (-xsen(t) - ycos(t), xcos(t) - ysen(t))\,.$$

■

Agora, vamos falar de duas interpretações geométricas das derivadas parciais de uma função vetorial de várias variáveis.

Interpretação Geométrica da Derivada Parcial

Para visualizar uma aplicação de derivada parcial de funções vetoriais de várias variáveis, considere uma função vetorial $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, digamos $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z)$, de forma que a função vetorial seja contínua em todo elemento de D.

Se mantemos as variáveis $y = b$ e $z = c$ constante, então, $\vec{f}$ passa a ser uma função vetorial de uma variável (a variável x) e, por isso, ela descreve uma curva no espaço. Para esse caso, a função vetorial $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ passa a ser representada pela curva $\vec{g}(x) = \vec{f}(x, b, c)$.

Dessa forma, a derivada parcial de $\vec{f}$ em relação a x no ponto $A = (a, b, c)$ equivale a derivada da função $\vec{g}(x) = \vec{f}(x, b, c)$ em $x = a$. Portanto, se no ponto A temos que a derivada parcial é não nula, ou seja, se $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} \neq 0$, então, esse vetor é o vetor tangente a curva dada pela curva $\vec{g}(x)$ no ponto A. Veja uma representação na Figura 2.1.

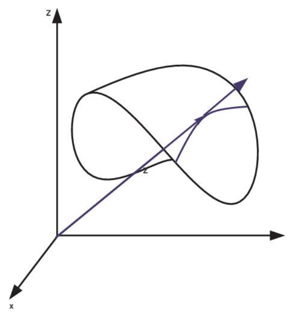

Figura 2.1: Uma interpretação geométrica para a Derivada Parcial de $\vec{f}$ em relação a uma das variáveis.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.5.6 *Seja $\vec{f}$ a função vetorial dada por*

$$\vec{f}(x, y, z) = y^2\vec{i} + zcos(x)\vec{j} + zsen(x)\vec{k}.$$

a) Descreva a curva c obtida fazendo $y = 0$ e $z = 3$.

b) Represente nesta curva a derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ no ponto $A = \left(\dfrac{\pi}{6}, 0, 3\right)$.

Solução:

a) Temos que $c : \vec{f}(x, 0, 3) = (0, 3cos(x), 3sen(x))$ e, por isso, a curva c fica dada por $c : \vec{g}(x) = (0, 3\cos(x), 3\mathrm{sen}(x))$, ou seja, c é a circunferência centrada na origem e raio $\sqrt{3}$ contida no plano YZ.

b) Como $\dfrac{d\vec{g}}{dx}(x) = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(P) = (0, -3sen(x), 3cos(x))$, aplicando o ponto $P = \left(\dfrac{\pi}{6}, 0, 3\right)$ chegamos a $\dfrac{d\vec{g}}{dx}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(A) = \left(0, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Logo, uma representação dessa curva e do vetor tangente no ponto fica dado pela Figura 2.2.

■

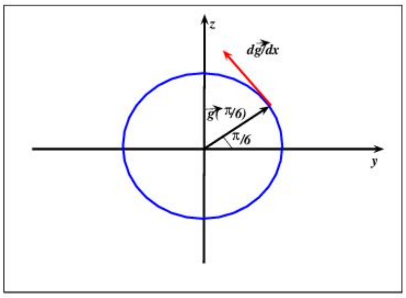

Figura 2.2: Representação do vetor $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}(P)$ do Exemplo 2.5.6.

Exemplo 2.5.7 *Seja $\vec{f}$ a função vetorial definida por*

$$\vec{f}(u,v) = (ucos(v), usen(v), 4-u^2),$$

para $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Determine as curvas obtidas fazendo $u = \sqrt{2}$ e $v = \dfrac{\pi}{4}$, respectivamente, e determine também $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ e $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solução: Para obtermos a primeira curva, tomemos $v = \dfrac{\pi}{4}$ em f. Dessa forma, temos que

$$\vec{g}(u) = \vec{f}\left(u, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{u\sqrt{2}}{2}, \frac{u\sqrt{2}}{2}, 4-u^2\right).$$

Como $\dfrac{d\vec{g}}{du}(u) = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(u, \dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -2u\right)$, segue que

$$\frac{d\vec{g}}{du}(\sqrt{2}) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\right).$$

Por outro lado, para obtermos a segunda curva, tomemos $u = \sqrt{2}$ em f e, assim,

$$\vec{h}(v) = \vec{f}\left(\sqrt{2}, v\right) = \left(\sqrt{2}cos(v), \sqrt{2}sen(v), 0\right).$$

Com isso, temos que $\dfrac{d\vec{h}}{dv}(v) = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v}(\sqrt{2}, v) = \left(-\sqrt{2}sen(v), \sqrt{2}cos(v), 0\right)$ e, consequentemente,

$$\frac{d\vec{h}}{dv}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) = (-1, 1, 0).$$

$\blacksquare$

Vamos a uma segunda interpretação para a derivada parcial de uma função vetorial de várias variáveis. Podemos considerar uma função $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to F \subset \mathbb{R}^2$, dada por $\vec{f}(x,y,t) = (f_1(x,y,t), f_2(x,y,t))$, como sendo um escoamento bidimensional, onde (x, y) representam a posição da partícula num subconjunto $F \subset \mathbb{R}^2$, no tempo $t = 0$. Assim, temos que $\vec{f}(x, y, t)$ representa a posição da partícula depois de decorrido o tempo t. Veja uma representação dada pela Figura 2.3.

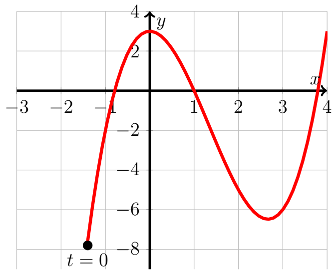

Figura 2.3: Representação de um escoamento bidimensional dada pela função vetorial $\vec{f}$.

Dessa forma, o caminho obtido pela partícula ao se movimentar a partir do instante $t = 0$ gera uma "Trajetória do Escoamento". O conjunto formado por todas as trajetórias do escoamento, determinadas pela função $\vec{f}$, forma a "Geometria do Escoamento". Tomando todos os vetores tangentes à trajetória, dados por $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial t}(x, y, t)$, para um determinado tempo t fixo, obtemos o "Campo de Velocidade do Escoamento" no instante t.

Exemplo 2.5.8 *Um escoamento é dado por*

$$\vec{f}(x, y, t) = \left(x^2 t, -y^2 t\right).$$

Determine o campo de velocidades do escoamento.

Solução: Como o escoamento é dado por $\vec{f}(x, y, t) = (x^2 t, -y^2 t)$, segue que o campo de velocidades do escoamento fica dado por

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(x, y, t) = \left(x^2, -y^2\right).$$

■

Agora falaremos de Derivadas Parciais de Ordem Superior. As derivadas parciais de uma função vetorial de várias variáveis $\vec{f}$, geralmente, também são funções vetoriais de várias variáveis e, por isso, elas podem ser derivadas parcialmente sobre as suas variáveis, quando elas existem.

Observação 2.5.2 *a) As derivadas parciais das derivadas parciais primeiras são chamadas de Derivadas Parciais de Segunda Ordem de $\vec{f}$. Assim, se $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, segue que as derivadas parciais de segunda ordem de $\vec{f}$ são dadas por:*

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \vec{f}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y \partial x} = \vec{f}_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \partial y} = \vec{f}_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} = \vec{f}_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\right).$$

b) Da mesma forma é possível obter as derivadas parciais segundas de uma função $\vec{f}$ de três variáveis, sendo que para cada derivada parcial primeira é possível obter três novas derivadas parciais, uma de cada variável.

c) As derivadas parciais de terceira ordem são as derivadas parciais das derivadas parciais de segunda ordem, quando as derivadas existirem. E assim, as derivadas parciais de ordem n são as derivadas parciais das derivadas de ordem $n-1$, quando as derivadas existirem.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.5.9 *Dada a função*

$$\vec{f}(x,y,z) = (sen(xy+2z), e^x sen(y), x\ln(yz)),$$

determine $\vec{f}_{xz}$ e $\vec{f}_{xzy}$.

Solução: Como a derivada parcial de primeira ordem é dada pela derivada parcial de cada uma das funções componentes, segue que

$$\vec{f}_x(x,y,z) = (ycos(xy+2z), e^x sen(y), \ln(yz)).$$

Então,

$$\vec{f}_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{f}_x(x,y,z)) = \left(-2ysen(xy+2z), 0, \frac{1}{z}\right).$$

Daí,

$$\vec{f}_{xzy}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(\vec{f}_{xz}(x,y,z)) = (-2sen(xy+2z) - 2xycos(xy+2z), 0, 0)\,.$$

■

Exemplo 2.5.10 *Dada a função $\vec{f}(x,y,z) = (x^4y^2, y^4+z^4, xyz)$, determine $\vec{f}_{xy}$ e $\vec{f}_{yx}$ no ponto $P = (2,1,4)$.*

Solução: Temos que

$$f_x(x,y,z) = (4x^3y^2, 0, yz)$$

e que

$$f_y(x,y,z) = (2x^4y, 4y^3, xz).$$

Então, $f_{xy}(x,y,z) = (8x^3y, 0, z)$ e $f_{yx}(x,y,z) = (8x^3y, 0, z)$. Assim, aplicando o ponto P, concluímos que $\vec{f}_{xy}(P) = \vec{f}_{yx}(P) = (64, 0, 4)$. ■

No Exemplo 2.5.10 podemos observar que as derivadas de segunda ordem $\vec{f}_{xy}$ e $\vec{f}_{yx}$ são iguais, mas nem sempre este fato é verdadeiro. Para descobrir quando essa igualdade é válida, basta aplicarmos o *Teorema de Schwartz*. No curso de Cálculo de funções escalares vocês já devem ter utilizado a versão correspondente do mesmo. A seguir apresentaremos o seu enunciado.

Teorema 2.5.1 *Teorema de Schwartz: Suponha que $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ seja definida sobre uma bola aberta $B = B(P_0, r)$ e que $\vec{f}_x$, $\vec{f}_y$, $\vec{f}_{xy}$ e $\vec{f}_{yx}$ também sejam definidas em B. Então, se $\vec{f}_{xy}$ e $\vec{f}_{yx}$ são contínuas em B tem-se que $\vec{f}_{xy}(P_0) = \vec{f}_{yx}(P_0)$.*

Demonstração: Será omitida. ■

Agora, vamos aos exercícios.......... Bons estudos.

2.6 Exercícios

Exercício 2.6.1 *Em cada um dos itens abaixo encontre as derivadas parciais de primeira ordem.*

a) $\vec{f}(x, y, z) = \sqrt{y}\vec{i} + x^2y^2z^2\vec{j} + e^{xyz}\vec{k}$;

b) $\vec{g}(x, y, z) = \left(\dfrac{x-y}{x+y}, 2x, 3\right)$;

c) $\vec{h}(x, y, z) = (9 - z^2, 9 - y^2, 9 - x^2)$;

d) $\vec{f}(x, y) = (e^{2x}, xye^{3y})$;

e) $\vec{g}(x, y) = (x\sqrt{y}, (x - y)ln(y))$;

f) $\vec{u}(x, y, z) = (e^{xy}, ln(xz), 2)$.

Exercício 2.6.2 *Dada a função vetorial $\vec{f}(x, y, z) = (x^2y, x + y, xz)$, encontre:*

a) $\vec{a} = \lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \vec{f}(x, y, z)$,

b) $\vec{f}_x(1, 0, 1)$,

c) $\vec{f}_y(1, 0, 1)$.

d) Conclua que $\vec{f}_x(1, 0, 1) + \vec{f}_y(1, 0, 1) = \vec{a}$.

Exercício 2.6.3 *Dada $\vec{f}(x, y, z) = (e^{xy}, e^{yz}, e^{zx})$, encontre $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial z}$.*

Exercício 2.6.4 *Seja $\vec{f}(x, y, z) = xz\vec{i} + y(1 + x^2)\vec{j} + z\vec{k}$. Então: (a) descreva a curva obtida fazendo $y = 2$ e $z = 1$; (b) Represente nesta curva a derivada parcial $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$ no ponto $P_0 = (1, 4, 1)$.*

Exercício 2.6.5 *Seja $\vec{f}(x, y, z) = ucos(v)\vec{i} + usen(v)\vec{j} + (3 + u^2)\vec{k}$, para $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$. Então: (a) determine as curvas obtidas fazendo $u = \sqrt{3}$ e $v = \dfrac{\pi}{2}$, respectivamente e (b) determine $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial u}\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial v}\left(\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.*

Exercício 2.6.6 *Encontre todas as derivadas parciais de segunda e de terceira ordem das funções vetoriais abaixo.*

a) $\vec{f}(x,y,z) = \left(xyz, xy, \sqrt{x^2+z^2}\right)$;

b) $\vec{f}(x,y,z) = (xy^4, xz^3+1, xe^{yz})$;

c) $\vec{f}(x,y,z) = (xyz, ln(y), ln(z))$;

d) $\vec{f}(x,y,z) = (e^y sen(x), e^x sen(y), z)$;

e) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, xyz\right)$;

f) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}, xcox(xy)\right)$;

g) $\vec{f}(x,y) = \left(ln(x^2+y^2), \sqrt{1-x^2-y^2}\right)$.

Exercício 2.6.7 *Encontre todas as derivadas parciais de segunda ordem da função vetorial* $\vec{f}(x,y,z) = (x+y+z, (x+y+z)^2, (x+y+z)^3)$, *no ponto* $P_0 = (1,0,1)$.

Exercício 2.6.8 *Verifique as hipóteses do Teorema de Schwartz para cada uma das funções abaixo.*

a) $\vec{f}(x,y) = \left(xy, \sqrt{x^2+y^2}\right)$;

b) $\vec{f}(x,y) = (xy^4, xy^3+1, xe^{xy})$;

c) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, xe^{x^2+y^2}\right)$.