Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT
Eng. Mecânica - Integral

Prova	2^a Avaliação de Cálculo 1 - 12/06/2025
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÂO** ser corrigida.
- Só serão corrigidas 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a **Não** ser desconsiderada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 10:00 as 11:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre, se existir, as assíntotas do gráfico da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$. Encontre também os pontos críticos e os pontos de inflexão, caso existam. Faça um estudo do crescimento e da concavidade de todos os pontos da função e faça de maneira precisa o esboço do gráfico.

Solução: Temos que $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 15x^4 - 20x^3$ e, por isso, $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$. Assim, f' e f'' existem para todos os números reais. Além disso, $f'(x) = \Leftrightarrow 15x^4 - 20x^3 = 0 \Leftrightarrow 5x^3(3x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{4}{3}$ e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Portanto, os pontos críticos do gráfico de f são os pontos $x = 0$ e $x = \dfrac{4}{3}$ e os candidatos a pontos de inflexão são os pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Observe que f não possui assíntotas verticais e oblíquas. Além disso,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

e, por isso, f não possui assíntotas horizontais. Fazendo um estudo do sinal de f' e f'' chegamos a Tabela 1.

x	f	f'	f''	Crescimento	Concavidade	Conclusão
$x < 0$		$+$	$+$	Crescente	P/ Cima	
$x = 0$	0					Máximo Local
$0 < x < 1$		$-$	$+$	Decrescente	P/ Cima	
$x = 1$	-2					Ponto de inflexão
$1 < x < \frac{4}{3}$		$-$	$-$	Decrescente	P/ Baixo	
$x = \frac{4}{3}$	$-\dfrac{256}{81}$					Mínimo Local
$x > \frac{4}{3}$		$+$	$-$	Crescente	P/ Baixo	

Tabela 1: Estudo da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

Um esboço do Grafico fica dada pela Figura 1.

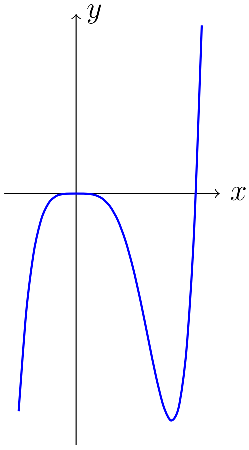

Figura 1: Esboço do gráfico da função $f(x) = 3x^5 - 5x^4$.

2ª Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):

a) Encontre as derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordem da função: $f(x) = x^2\sqrt{x} - 5x$.

b) Obtenha uma equação da reta tangente à curva $9x^3 + 8y^3 = 1$ no ponto $(1, -1)$.

Solução:

a) Temos que $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 5x$, assim,

b) $f'(x) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - 5$; c) $f''(x) = \dfrac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}$; d) $f'1'(x) = \dfrac{15}{8}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{15}{8x^{\frac{1}{2}}}$.

e) Temos que a inclinação da reta tangente é dada pela derivada da curva no ponto. Assim, derivando implicitamente em relação a x temos:

$$\frac{d}{dx}\left(9x^3 + 8y^3\right) = \frac{d}{dx}(1) \Rightarrow 27x^2 + 24y^2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{9x^2}{8y^2}.$$

Desta forma, no ponto específico, temos que a inclinação da reta tangente m_t fica dada por

$$m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-1)} = -\frac{9}{8}.$$

Portanto, uma equação da reta tangente fica cada por

$$r_t : y + 1 = -\frac{9}{8}(x - 1).$$

3ª Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):

a) Encontre a derivada da função $f(x) = \text{arcsen}(x)$.

b) A medida da aresta de um cubo é 15 cm, com um erro possível de 0.01 cm. Use diferencial para encontrar o erro aproximado do cálculo (a) do volume; (b) da área de uma das faces.

Solução:

a) Temos que $y = \text{arcsen}(x) \Leftrightarrow x = \text{sen}(y)$. Assim, derivando a segunda expressão em função de x obtemos

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}(y)) \Rightarrow 1 = \cos(y)\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Assim, como $\text{sen}^2(y) + \cos^2(y) = 1$ e $\cos(y) > 0$ na definição de $f(x) = \text{arcsen}(x)$, segue que $\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}$. Portanto,

$$\frac{d}{dx}(\text{arcsen}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Temos que o volume do cubo é $V(x) = x^3$. Desta forma, por diferencial, o erro cometido no cálculo do volume é dado por $dV = 3x^2 dx$ e, consequentemente, o erro no cálculo do volume fica dado por

$$dV = 3 \cdot 15^2 \cdot 0.01 = 6.75 \; u.v.$$

Por outro lado, a área de uma face é dada por $A(x) = x^2$. Desta forma, por diferencial, o erro cometido no cálculo da área é dado por $dA = 2x dx$ e, consequentemente, o erro no cálculo do volume fica dado por

$$dA = 2 \cdot 15 \cdot 0.01 = 0.3 \; u.a.$$

4ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo para a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e outro seguindo para a direção sul com velocidade de 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro, no instante em que o primeiro carro está a $0,2$ km do cruzamento e o segundo a $0,15$ km?

Solução: Considere que t $h(horas)$ seja o tempo decorrido. Considere também que x indica a distância que o carro que está se movendo para a direção leste está do cruzamento (em km) em t h e que y indica a distância que o carro que está se movendo para a direção sul está do cruzamento (em km) em t h. Tome z como sendo a distância que os dois carros estão um do outro. Assim, uma ilustração do problema fica dada pela Figura 2.

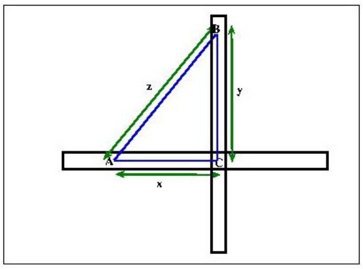

Figura 2: Figura representando o problema da 4^a Questão.

Do Triângulo ABC, temos que $z^2 = x^2 + y^2$. Ainda como os carros estão se aproximando do cruzamento quando o tempo passa, segue que a velocidade de cada um é negativa, ou seja, $\frac{dx}{dt} = -90$ e $\frac{dy}{dt} = -60$. Daí, $2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$. Como $x = 0,2$ e $y = 0,15$, usando o Teorema de Pitágoras, chegamos a $z = 0,25$ e, por isso,

$$2 \cdot 0,25 \cdot \frac{dz}{dt} = 2 \cdot (-90) + 2 \cdot (-60) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -108.$$

Portanto, no instante em questão, os carros estão se aproximando um do outro a uma taxa de 108 km/h.

5ª **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):** Calcule as derivadas de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)$; b) $f(x) = \cot^4(x) - \csc^4(x)$; c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solução:

a) Temos que

$$f'(x) = (2x^4 - 1)'(5x^3 + 6x) + (2x^4 - 1)(5x^3 + 6x)' = 8x^3(5x^3 + 6x) + (2x^4 - 1)(15x^2 + 6) =$$

$$= 40x^6 + 42x^4 + 30x^6 + 12x^4 - 15x^2 - 6 = 70x^6 + 60x^4 - 15x^2 - 6.$$

b) Temos que

$$f'(x) = 4\cot^3(x) \cdot (\cot(x))' - 4\csc^3(x) \cdot (\csc(c)) = -4\cot^3(x)csc^2(x) + 4\csc^3(x)\csc(c)\cot(x) =$$

$$= 4\cot(x)csc^2(x)\left[-\cot^2(x) + \csc^2(x)\right] = 4\cot(x)csc^2(x).$$

c) Temos que

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)' \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

6ª **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e uma altura de 12 cm.

Solução: Considere o raio do cilindro como sendo r e a altura sendo h. Então, o volume do cilindro fica dado por $V = r^2 h\pi$. Uma ilustração do problema é dado pela Figura 3.

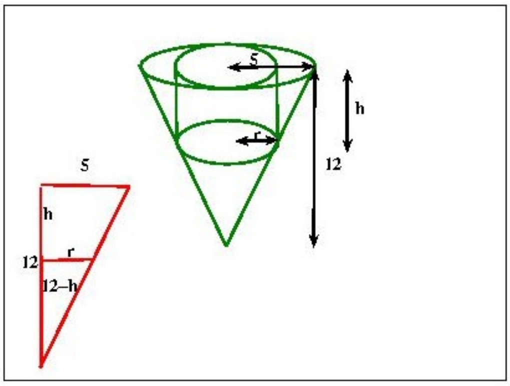

Figura 3: Esboço do gráfico da função g da 6^a Questão.

Da Figura 3, e usando semelhanças de triângulos, temos que

$$\frac{5}{r} = \frac{12}{12-h} \Rightarrow 60 - 5h = 12r \Rightarrow 5h = 60 - 12r \Rightarrow h = \frac{12(5-r)}{5}.$$

Assim, substituindo o valor de h na função V chegamos a

$$V(r) = \frac{12\pi}{5}(5r^2 - r^3),$$

com $0 \leq r \leq 5$.

Sendo V é uma função contínua definida num intervalo fechado, segue do teorema de Weierstrass que V assume valor de máximo e de mínimo global no intervalo. Como $V'(r) = \dfrac{12\pi}{5}(10r - 3r^2)$, temos que $V'(r)$ existe para todo $r \in \mathbb{R}$ e, por isso, os pontos críticos de V são dados quando $V'(r) = 0$, ou seja, nos pontos $x = 0$ ou $x = \dfrac{10}{3}$. Daí, como

$$V(0) = 0, \; V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400\pi}{9} \text{ e } V(5) = 0,$$

segue que o volume do cilindro é máximo se $r = \dfrac{10}{3}$ e, consequentemente, $h = 4$.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!