3.9 Campos Vetoriais Conservativos

Vamos agora apresentar a definição de *Campos Conservativos*. Esse tipo de campo vetorial é muito importante na resolução de integrais de linha. A ideia desta definição é relacionar campos vetoriais com o gradiente de funções escalares, quando possível.

Definição 3.9.1 *Seja $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial. Se existe uma função $u = u(x, y, z)$ diferenciável em U tal que*

$$\vec{f} = \nabla u,$$

então, dizemos que $\vec{f}$ é um Campo Conservativo ou um Campo Gradiente em U. A função $u : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é chamada de Função Potencial de $\vec{f}$ em U.

No nosso estudo vamos trabalhar apenas com campos conservativos em $\mathbb{R}^3$, visto que queremos relacionar a verificação de campo conservativos com o cálculo do rotacional.

Exemplo 3.9.1 *O campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = (4x + 5yz, 5xz, 5xy)$ é um campo conservativo, visto que se $u(x, y, z) = 2x^2 + 5xyz$ é uma função em $\mathbb{R}^3$, u é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e $\nabla u = \vec{f}$. Portanto, u é uma função potencial para $\vec{f}$.*

■

Exemplo 3.9.2 *O campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$, $(x, y) \neq (0, 0)$, é um campo conservativo, visto que se $u(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ é uma função em $\mathbb{R}^2$, tal que u é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e $\nabla u = \vec{f}$. Portanto, u é uma função potencial para $\vec{f}$.*

■

O Teorema a seguir vai nos dar ferramentas para verificar se um determinado campo vetorial é, ou não, um campo conservativo. O utilizaremos sempre com este intuito.

Teorema 3.9.1 *Seja $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo, definido por $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ e com derivadas parciais de 1^a ordem contínuas em U. Se $\vec{f}$ admite uma função potencial u, então,*

$$rot(\vec{f}) = \vec{0}, \ \forall (x, y, z) \in U.$$

Reciprocamente, se U é um conjunto simplesmente conexo e se $rot(\vec{f}) = \vec{0}$, $\forall (x, y, z) \in U$, então, $\vec{f}$ admite uma função potencial $u = u(x, y, z)$ em U.

Demonstração: Será omitida, visto que não é o objetivo deste curso. ■

Observação 3.9.1 *De uma maneira simplória, podemos "enxergar" um conjunto $\Re \subset \mathbb{R}^n$ sendo simplesmente conexo se ele não tiver buracos e, consequentemente, se for "deformado" ele será reduzido a um ponto.*

Do Teorema 3.9.1 temos que para uma determina função $\vec{f}$ ser um campo conservativo num domínio U é necessário e suficiente que $rot(\vec{f}) = \vec{0}$ em U e que U seja um conjunto simplesmente conexo. Logo, para resolvermos exemplos dessa natureza precisamos verificar as duas situações.

Para resolvermos os exemplos, perceba que se $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ é o gradiente de uma função potencial u, num domínio $U \subset \mathbb{R}^3$, então, poderemos determinar u, usando as identidades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1,\ \frac{\partial u}{\partial y} = f_2 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = f_3.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.9.3 *O campo vetorial $\vec{f}(x,y,z) = (2x^2y, 5xz, x^2y^2)$ representa ou não um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$?*

Solução: Calculando o rotacional de $\vec{f}$, temos que:

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 5xz & x^2y^2 \end{bmatrix} = \left(2x^2y - 5x, -2xy^2, 5x - 2x^2\right) \neq \vec{0}.$$

Portanto, como $rot(\vec{f}) \neq \vec{0}$, temos que $\vec{f}$ não é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$.
■

Exemplo 3.9.4 *O campo vetorial $\vec{f}(x,y,z) = (4xy + z, 2x^2, x)$ representa ou não um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$? Se sim, obtenha uma função potencial para $\vec{f}$.*

Solução: Calculando o rotacional de $\vec{f}$, temos que

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4xy + z & 2x^2 & x \end{bmatrix} = (0, 1 - 1, 4x - 4x) = \vec{0}.$$

Portanto, como as derivadas parciais de 1^a ordem de todas as funções coordenadas existem, são contínuas e como $rot(\vec{f}) = \vec{0}$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, segue que $\vec{f}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$. Assim, existe uma função potencial $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla u = \vec{f}$, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 = 4xy + z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = f_2 = 2x^2 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial z} = f_3 = x.$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4xy + z$, segue que se integrarmos dos dois lados da igualdada em relação a x recuperamos a função u como a seguir

$$u(x, y, z) = \int (4xy + z)dx = 2x^2y + xz + g(y, z),$$

onde $g(y, z)$ é uma função constante em relação a x, ou seja, é uma função que depende apenas de y e de z. Logo,precisamos agora restabelecer a função $g(y, z)$. Derivando parcialmente a função u em relação a y, temos

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Como $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f_2 = 2x^2$, segue que $2x^2 + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$, ou seja, a função $g(y, z)$ é constante em relação a y e, por isso, ela é uma função que depende apenas de z, ou seja, $g(y, z) = h(z)$. Dessa forma, temos que

$$u = 2x^2y + xz + h(z).$$

Por fim, para obtermos a função $h(z)$, derivando a função u em relação a variável z, teremos que $\dfrac{\partial u}{\partial z} = x + \dfrac{\partial h}{\partial z}$ e que $\dfrac{\partial u}{\partial z} = f_3 = x$. Logo, $\dfrac{\partial h}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ $h(z) = cte$. Portanto, temos que

$$u = 2x^2y + xz + cte.$$

■

Exemplo 3.9.5 *Verifique se o campo vetorial $\vec{f} = (yz + 2, xz + 1, xy + 2z)$ é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, encontre uma função potencial u tal que $\nabla u = \vec{f}$.*

Solução: Temos que as funções coordenadas tem derivadas parciais de qualquer ordem e são todas contínuas, visto que elas são polinômios. Além disso,

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz + 2 & xz + 1 & xy + 2z \end{bmatrix} = (x - x, y - y, z - z) = \vec{0}.$$

Como $\mathbb{R}^3$ é um conjunto simplesmente conexo, segue que $\vec{f}$ admite uma função potencial u. Dessa forma, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 = yz + 2 \Rightarrow u(x, y, z) = \int (yz + 2)dx = xyz + 2x + g(y, z).$$

Derivando u em relação a variável y e sabendo que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f_2$, segue que

$$xz + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = xz + 1 \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 1 \Leftrightarrow g(y, z) = y + h(z).$$

Logo, temos que

$$u(x, y, z) = xyz + 2x + y + h(z).$$

Por fim, derivando novamente a função u em relação a variável z, chegamos a

$$xy + \frac{dh}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z} = f_3 = xy + 2z \Rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow h(z) = z^2 + c,$$

onde c é uma constante. Portanto,

$$u(x, y, z) = xyz + 2x + y + z^2 + c.$$

■

Exemplo 3.9.6 *Verifique se o campo vetorial $\vec{f} = (sen(y) + z - y, xcos(y) - x + z + 2y, x + y + 6z)$ é um campo gradiente em $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, encontre uma função potencial u tal que $\nabla u = \vec{f}$.*

Solução: Temos que as funções coordenadas tem derivadas parciais de qualquer ordem e são todas contínuas, visto que elas são produtos de funções contínuas. Além disso,

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ sen(y) + z - y & xcos(y) - x + z + 2y & x + y + 6z \end{bmatrix} =$$

$$= (1 - 1, 1 - 1, cos(y) - 1 - (cos(y) - 1)) = \vec{0}.$$

Como $\mathbb{R}^3$ é um conjunto simplesmente conexo, segue que $\vec{f}$ admite uma função potencial u. Dessa forma, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sen(y) + z - y \Rightarrow u(x, y, z) = \int (sen(y) + z - y)dx =$$

$$= xsen(y) + xz - xy + g(y, z).$$

Derivando u em relação a variável y e sabendo que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xcos(y) - x + z + 2y$, segue que

$$xcos(y) - x + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = -x + z + 2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y, z) = yz + y^2 + h(z).$$

Consequentemente, temos que

$$u(x, y, z) = xsen(y) + xz - xy + yz + y^2 + h(z).$$

Por fim, derivando novamente a função u em relação a variável z, chegamos a

$$x + y + \frac{dh}{dz} = x + y + 6z \Rightarrow \frac{dh}{dz}(z) = 6z \Rightarrow h(z) = 3z^2 + c,$$

onde c é uma constante. Portanto,

$$u(x, y, z) = xsen(y) + xz - xy + yz + y^2 + 3z^2 + c.$$

■

Exemplo 3.9.7 *O campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, x\right)$ *representa ou não um campo gradiente nos seguintes domínios:*

a) em $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-3)^2 + y^2 < 1\}$*;*

b) em $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x^2 + y^2 < 16\}$*.*

Solução: A primeira coisa a fazer é calcular o rotacional de $\vec{f}$. Dessa forma, temos que:

$$rot(\vec{v}) = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{bmatrix} = \left(0, 0, \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \vec{0}.$$

Além disso, temos que as derivadas parciais de 1^a ordem das funções coordenadas são contínuas em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que $(x,y) \neq (0,0)$. Por fim, precisamos verificar se cada um dos domínios D_1 e D_2 são conjuntos simplesmente conexos, para aplicar o Teorema 3.9.1.

a) Da Figura 3.18, podemos observar que o domínio D_1 é um conjunto simplesmente conexo, visto que D_1 é formado por todos os pontos de um círculo. Portanto, pelo Teorema 3.9.1 temos que $\vec{f}$ é um campo conservativo em D_1.

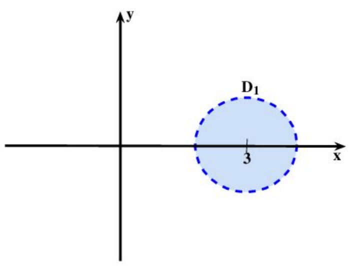

Figura 3.18: Representação do Domínio D_1 do Exemplo 3.9.7.

b) Por outro lado, da Figura 3.19 temos que o domínio D_2 é formado por todos os pontos de uma coroa circular, que não contém a origem. Dessa forma, temos que o domínio D_2 não é simplesmente conexo, pois D_2 possui um “buraco”. Portanto, não se pode concluir, pelo Teorema 3.9.1, que o campo $\vec{f}$ é conservativo ou não em D_2.

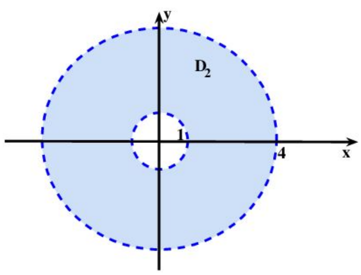

Figura 3.19: Representação do Domínio D_2 do Exemplo 3.9.7.

■

No Capítulo 4 teremos condições de responder a pergunta do Exemplo 3.9.7. Veremos que ao calcularmos a *Integral de Linha* dessa função no domínio D_2, o resultado obtido mostrará que o campo $\vec{f}$ não será um campo conservativo em D_2.

Observação 3.9.2 *Observe que ao obtermos uma função potencial u para um campo conservativo, na verdade obtemos uma família de funções potenciais, visto que para cada valor da constante c obtemos uma função potencial para o campo* $\vec{f}$.

Faça alguns exercícios para fixar o conteúdo. Bons estudos........

3.10 Exercícios

Exercício 3.10.1 *Verifique se os seguintes campos vetoriais são conservativos em algum domínio. Em caso afirmativo, encontre uma função potencial para* $\vec{f}$.

a) $\vec{f}(x,y) = (e^x sen(y), e^x cos(y))$, *em* $\mathbb{R}^2$;

b) $\vec{f}(x,y,z) = (y,x,z)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

c) $\vec{f}(x,y) = \left(\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)$, *em* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-3)^2 + (y-5)^2 < 3\}$;

d) $\vec{f}(x,y,z) = (x^2 sen(y) + z, y cos(y) + 1, z^2 - xy)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

e) $\vec{f}(x,y) = (x^2 + y, y^2 - x)$, *em* $\mathbb{R}^2$;

f) $\vec{f}(x,y,z) = (-sen(x) + cos(x), z, y)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

g) $\vec{f}(x,y) = (sen(x), cos(y))$, *em* $\mathbb{R}^2$;

h) $\vec{f}(x,y,z) = (2x, 5yz, x^2y^2z^2)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

i) $\vec{f}(x,y,z) = (1 + y sen(x), 1 - \cos(x), 0)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

j) $\vec{f}(x,y,z) = (\ln(xy), \ln(yz), \ln(zx))$, *em* $\mathbb{R}^3$ *tal que* $x,y,z > 0$;

k) $\vec{f}(x,y,z) = (10xz + y sen(xy), x sen(xy), 5x^2)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

l) $\vec{f}(x,y,z) = (e^x, 2e^y, 3e^z)$, *em* $\mathbb{R}^3$;

m) $\vec{f}(x,y) = (x - y, x + y)$, *em* $\mathbb{R}^2$;

n) $\vec{f}(x,y) = (y cos(xy), x cos(xy))$, *em* $\mathbb{R}^2$.