2.3 Limites Laterais de Funções reais de uma variável real

Quando estamos considerado o $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, estamos interessados em valores que a função assume quando x está num intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a, sendo esses valores maiores do que ou menores do que a.

Mas essas ideia não pode ser aplicada sempre. Por exemplo, considere a função f definida por $f(x) = \sqrt{x-4}$. Como a função $f(x)$ não está definida para $x < 4$, segue que f não está definida para nenhum intervalo aberto contendo 4 e, por isso, $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x-4}$ não tem significado da forma que o limite foi definido anteriormente. Porém, considerando que x está restrito a apenas valores maiores do que 4, temos que o valor de $\sqrt{x-4}$ pode se tornar tão próximo de zero quanto desejarmos, para isso, basta tomarmos x suficientemente próximo de 4, porém, apenas valores de x maiores do que 4. Em tal caso, dizemos que x aproxima-se de 4 pela direita, obtendo-se o *Limite Lateral à Direita*, como definido a seguir.

Definição 2.3.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número de algum intervalo aberto $(a,c) \subset X$. Então, o* ***Limite da função** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **pela Direita é** L, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$

se $\forall\ \epsilon > 0$ dado, $\exists\ \delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$, então, $|f(x) - L| < \epsilon$.

■

De uma maneira análoga, podemos definir o *Limite Lateral à Esquerda* de uma função, para isso, basta que o valor de x esteja restrito a valores menores do que a.

Definição 2.3.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número de algum intervalo aberto $(c,a) \subset X$. Então, o* ***Limite de** $f(x)$ **quando** x **tende a** a **pela Esquerda é** L, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$

se $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que se $0 < a - x < \delta$, então, $|f(x) - L| < \epsilon$.

■

Devido a semelhança entre as definições de limite de funções e de limites laterais, as propriedades apresentadas para limite de funções reais de uma variável real (Teorema 2.1.1) podem ser automaticamente adaptadas para o cálculo de limites laterais e, por isso, não serão repetidas nessa seção. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.1 *A **Função Sinal** é definida por*

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x > 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \\ -1, & se \quad x < 0 \end{cases}.$$

Nessas condições, determine $\lim\limits_{x\to 0^+} sgn(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} sgn(x)$, se existirem.

Solução: Se $x \to 0^-$, então, $x < 0$ e, consequentemente, $\text{sgn}(x) = -1$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^-} \text{sgn}(x) = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

Por outro lado, se $x \to 0^+$, então, $x > 0$ e, consequentemente, $\text{sgn}(x) = 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 0^+} \text{sgn}(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

■

Exemplo 2.3.2 *Seja f a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & se \quad x > 3 \\ 11 - x^2, & se \quad x \leq 3 \end{cases}.$$

Determine $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 3^-} f(x)$, se existirem.

Solução: Quando $x \to 3^+$ temos que $x > 3$ e, nesse caso, $f(x) = 2x - 4$. Assim,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x - 4) = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Por outro lado, se $x \to 3^-$, então, $x < 3$ e, consequentemente, $f(x) = 11 - x^2$. Assim, temos que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (11 - x^2) = 11 - 3^2 = 2.$$

■

Exemplo 2.3.3 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se \quad x < 2 \\ 1, & se \quad x = 2 \\ 4 - x, & se \quad x > 2 \end{cases}.$$

Determine $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x)$, se existirem.

Solução: Se $x \to 2^+$, então, $x > 2$ e, consequentemente, $f(x) = 4 - x$. Assim,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (4 - x) = 4 - 2 = 2.$$

Por outro lado, se $x \to 2^-$, então, $x < 2$ e, consequentemente, $f(x) = x^2$. Logo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4.$$

■

Existe uma relação muito importante entre limite de uma função e os seus limites laterais. O limite de uma função existe se os seus limites laterais existem e são de mesmo valor. Assim, para mostrar que o limite de uma determinada função não existe basta, por exemplo, mostrar que um dos seus limites laterais não existem ou que os limites laterais são diferentes. A recíproca desse comentário também vale, como formalizado no teorema a seguir.

Teorema 2.3.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número de algum intervalo aberto $I \subset X$, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Então, temos que:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Em outras palavras, o limite de uma função f é L se, e semente se, os limites laterais de f existem e são ambos iguais a L.

Demonstração: Exercício. ■

Vamos alguns exemplos.

Exemplo 2.3.4 *Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} f(x)$, sabendo que*

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & se \quad x \neq 0 \\ 2, & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Solução: Temos que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser reescrita como a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x > 0 \\ 2, & se \quad x = 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}.$$

Então, como $\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0} -x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0} x = 0$, segue que $\lim_{x\to 0^-} |x| = 0 = \lim_{x\to 0^+} |x|$ e, por isso, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. ■

Exemplo 2.3.5 *Calcule, se existir, $\lim_{x\to 0} h(x)$, sabendo que*

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x, & se \quad x < 0 \\ 5 + x^2, & se \quad x > 0 \end{cases}.$$

Solução: Observe que se $x \to 0^-$, segue que, $x < 0$ e, por isso, $h(x) = 3x^2 - 2x$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0}(3x^2 - 2x) = 3\cdot 0^2 - 2\cdot 0 = 0$. Por outro lado, se $x \to 0^+$, segue que, $x > 0$ e, por isso, $h(x) = 5 + x^2$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0}(5 + x^2) = 5 + 0^2 = 5$. Portanto, como $\lim_{x\to 0^-} h(x) = 0 \neq 5 = \lim_{x\to 0^+} h(x)$, segue que $\lim_{x\to 0} h(x)$ não existe. ■

Exemplo 2.3.6 *Calcule, se existir, $\lim_{x\to 1} g(x)$, sabendo que*

$$g(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & se \quad x \leq 1 \\ 2 + x^2, & se \quad x > 1 \end{cases}.$$

Solução: Observe que se $x \to 1^-$, segue que, $x < 1$ e, por isso, $g(x) = 4 - x^2$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1}(4 - x^2) = 4 - 1^2 = 3$. Por outro lado, se $x \to 1^+$, segue que, $x > 1$ e, por isso, $g(x) = 2 + x^2$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1}(2 + x^2) = 2 + 1 = 3$. Dessa forma, como $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 3 = \lim_{x\to 1^+} g(x)$, segue que $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$. ■

Exemplo 2.3.7 *Calcule, se existirem,* $\lim_{x\to -3} h(x)$ *e* $\lim_{x\to 3} h(x)$*, sabendo que*

$$h(x) = \begin{cases} 5+x, & se \quad x<-3 \\ \sqrt{9-x^2}, & se \quad -3\le x\le 3 \\ 3-x, & se \quad x>3 \end{cases}.$$

Solução: Primeiro façamos o caso quando $x\to 3$. Observe que se $x\to 3^+$, segue que, $x>3$ e, por isso, $h(x)=3-x$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3} 3-x = 3-3 = 0$. Por outro lado, se $x\to 3^-$, temos que, $x<3$. Contudo, x está próximo de 3 e, por isso, $h(x)=\sqrt{9-x^2}$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 3^-} h(x) = \lim_{x\to 3}\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9} = 0$. Portanto, $\lim_{x\to 3^-} h(x) = 0 = \lim_{x\to 3^+} h(x)$ e, por isso, $\lim_{x\to 3} h(x) = 0$.

Agora vamos calcular o caso quando $x\to -3$. Observe que se $x\to -3^-$, segue que, $x<-3$ e, por isso, $h(x)=5+x$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to -3^-} h(x) = \lim_{x\to -3} 5+x = 5-3 = 2$.Por outro lado, se $x\to -3^+$, temos que, $x>-3$. Contudo, x está próximo de -3 e, por isso, $h(x)=\sqrt{9-x^2}$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to -3^+} h(x) = \lim_{x\to -3}\sqrt{9-x^2} = 9-9 = 0$. Portanto, $\lim_{x\to -3^-} h(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x\to -3^+} h(x)$ e, por isso, $\lim_{x\to -3} h(x)$ não existe. ■

Exemplo 2.3.8 *Calcule, se existir,* $\lim_{x\to 1} f(x)$*, sabendo que*

$$f(x) = \begin{cases} x^3+1, & se \quad x<1 \\ 3, & se \quad x=1 \\ x+1, & se \quad x>1 \end{cases}.$$

Solução: Observe que se $x\to 1^+$, segue que $x>1$ e, por isso, $f(x)=x+1$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$. Por outro lado, se $x\to 1^-$, temos que, $x<1$ e, por isso, $f(x)=x^3+1$ e, consequentemente, temos que $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 3} x^3+1 = 1^3+1 = 2$. Portanto, $\lim_{x\to 1^-} h(x) = 2 = \lim_{x\to 1^+} h(x)$ e, por isso, $\lim_{x\to 1} h(x) = 2$. ■

Agora, faça alguns exercícios para fixar o conteúdo. Bons estudos.

2.4 Exercícios

Exercício 2.4.1 *Calcule os limites laterais da função no ponto indicado e descida se o limite da função existe no ponto. Faça um esboço do gráfico da função.*

a) $f(x)=|x-5|$, *em* 5;

b) $f(x)=3+|2x-4|$, *em* 2;

c) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, *em* 0;

d) $f(x)=\begin{cases} 2, & se\ x<1 \\ -1, & se\ x=1 \\ -3, & se\ x>1 \end{cases}$, *em* 1;

e) $f(x)=\begin{cases} -2, & se\ x\le 0 \\ 2, & se\ x>0 \end{cases}$, *em* 0;

f) $f(x)=\begin{cases} x+4, & se\ x\leq -4 \\ 4-x, & se\ x>-4 \end{cases}$, *em* -4;

g) $f(x)=\begin{cases} x+3, & se\ x\leq -2 \\ 3-x, & se\ x>-2 \end{cases}$, *em* -2;

h) $f(x)=\begin{cases} x^2, & se\ x\leq 2 \\ 8-2x, & se\ x>2 \end{cases}$, *em* 2;

i) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & se\ x<2 \\ 4, & se\ x=2 \\ 4-x^2, & se\ x>2 \end{cases}$, *em* 2;

j) $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & se\ x<1 \\ 4, & se\ x=1 \\ x^2+2, & se\ x>1 \end{cases}$, *em* 1;

k) $f(x)=\begin{cases} |x-1|, & se\ x<-1 \\ 0, & se\ x=-1 \\ |1-x|, & se\ x>-1 \end{cases}$, *em* -1;

l) $f(x)=\begin{cases} 2, & se\ x<-2 \\ \sqrt{4-x^2}, & se\ -2\leq x\leq 2 \\ -2, & se\ x>2 \end{cases}$, *em* -2 *e em* 2;

m) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2-9}, & se\ x\leq -3 \\ \sqrt{9-x^2}, & se\ -3\leq x\leq 3 \\ \sqrt{x^2-9}, & se\ x\geq 3 \end{cases}$, *em* -3 *e em* 3;

n) $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x}, & se\ x<0 \\ \sqrt{x}, & se\ x\geq 0 \end{cases}$, *em* 0;

o) $f(x)=[[x]]$, *em* 5;

p) $f(x)=[[x-3]]$ *em* 4.

Exercício 2.4.2 *Em cada uma das funções a seguir, encontre os valores de* a *e* b*, de forma que o limite nos pontos indicado exista.*

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & se\ x<4 \\ 5x+a, & se\ x\geq 4 \end{cases}$, *em* 4;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2, & se\ x<-2 \\ ax+b, & se\ -2\leq x\leq 2 \\ 2x-6, & se\ x>2 \end{cases}$, *em* -2 *e em* 2;

c) $f(x)=\begin{cases} ax-3, & se\ x\leq 1 \\ x^2+a, & se\ x>1 \end{cases}$, *em* 1;

d) $f(x)=\begin{cases} 2x-a, & se\ x<-3 \\ ax+2b, & se\ -3\leq x\leq 3 \\ b-5x, & se\ x>3 \end{cases}$, *em* -2 *e em* 2.