Capítulo 2

Limite e Continuidade de Funções reais de uma variável

Nesse capítulo vamos apresentar a definição e as propriedades de *Limite de Funções Reais de uma Variável Real* na Seção 2.1, em seguida os conceitos relacionados com os *Limites Laterais* de uma função real de uma variável real 2.3, os *Limites Infinitos* 2.5 e os *Limites no Infinito* 2.7. Em seguida trataremos da *Continuidade de Funções Reais de uma Variável Real* na seção 2.9 e, por fim, a *Continuidade das Funções Trigonométricas* e o *Teorema do Confronto* na Seção 2.11. Esses conceitos são extremamente importantes para o Cálculo. Estude-os, entenda-os e faça um bom proveito do que vem a seguir.

2.1 Definição e Exemplos

A ideia de limite de uma função é entender o comportamento de uma função quando a variável dependente se aproxima de um determinado valor. Esse conceito é de grande importância para a matemática e a ciência em geral. Para construirmos essa ideia, considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}.$$

Temos que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Então, vamos nos concentrar no que ocorre com o valor da função quando nos aproximamos do 1, mas nunca para $x = 1$.

Na Tabela 2.1, podemos observar os valores de $f(x)$ quando são tomados alguns valores de x próximos, porém diferentes, de 1, visto que a função não está definida para $x = 1$. Assim,

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0	3		$0,99$	$4,98$
$0,25$	$3,5$		$0,999$	$4,998$
$0,5$	4		$0,9999$	$4,9998$
$0,75$	$4,5$		$0,99999$	$4,99998$
$0,9$	$4,8$		$0,999999$	$4,999998$

Tabela 2.1: Valores obtidos pela função $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$.

A medida que o valor da variável x se aproxima do valor 1, a função se aproxima do valor 5. Então, podemos tornar o valor da função $f(x)$ tão próximo de 5 quanto desejarmos, para isso, basta escolhermos um valor de x suficientemente próximo de 1.

Para esse primeiro caso, tomamos apenas valores menores do que 1. Veja a Tabela 2.2. Para esse segundo caso, observe o que acontece quanto são considerados alguns valores de x próximos de 1 mas maiores do que 1 para a mesma função.

x	$f(x)$		x	$f(x)$
2	7		$1,01$	$5,02$
$1,75$	$6,5$		$1,001$	$5,002$
$1,5$	6		$1,0001$	$5,0002$
$1,25$	$5,5$		$1,00001$	$5,00002$
$1,1$	$5,2$		$1,000001$	$5,000002$

Tabela 2.2: Valores obtidos pela função $f(x)$.

Da mesma forma que para valores menores do que 1, a medida que o valor da variável x se aproxima de 1, o valor da função se aproxima do valor 5. Portanto, quanto mais perto de 1 o valor de x se aproxima, mais próximo o valor da função f fica de 5. Por exemplo, se x difere de 1 por $\pm 0,01$, então, a função difere de 5 por $\pm 0,02$.

Resumindo: É possível tomar valores de f tão próximos de 5 quanto se deseje, para isso, basta tomarmos valores de x suficientemente próximo de 1.

Usando uma notação simbólica: $|f(x)–5|$ pode ficar tão próximo de zero quanto desejarmos, para isso, basta tomar $|x-1|$ suficientemente pequeno. É importante ressaltar que $f(x)$ nunca vai valer 5, pois x nunca vai valer 1. Essa é a ideia utilizada para elaborar a definição de *Limite* de uma função real de uma variável real, definição esta apresentada a seguir.

Definição 2.1.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número de algum intervalo aberto $I \subset X$, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. O* ***Limite de*** *$f(x)$* ***quando*** *x* ***tende a*** *a* ***é*** *L, e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se $\forall\ \epsilon > 0$ dado, $\exists\ \delta > 0$ tal que se $0 < |x-a| < \delta$, então, $|f(x)-L| < \epsilon$.

$\blacksquare$

Em outras palavras, a Definição 2.1.1 garante que os valores de função $f(x)$ ficam tão próximos do L quanto se deseje, para isso, basta que os valores de x sejam tomados suficientemente próximo de a. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.1.1 *Seja $f(x) = 4x-7$. Mostre que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$.*

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Observe que $\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \Longleftrightarrow \exists \delta > 0$ tal que $0 < |x-3| < \delta$ sempre que $|f(x)-5| < \epsilon$. Como

$$|x-3| = \frac{|4x-12|}{4} = \frac{1}{4}|(4x-7)-5| = \frac{1}{4}|f(x)-5|,$$

segue que se $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$, temos que

$$\text{se } 0 < |x-3| < \delta, \text{ então, } |f(x)-5| = 4|x-3| < 4\delta = 4\frac{\epsilon}{4} = \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 5.$ ■

Exemplo 2.1.2 *Seja* $f(x) = 3x-4$. *Mostre que* $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -7$.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Observe que $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -7 \Leftrightarrow \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x+1| < \delta$ sempre que $|f(x)+7| < \epsilon$. Como

$$|x+1| = \frac{|3x+3|}{3} = \frac{1}{3}|(3x-4)+7| = \frac{1}{3}|f(x)+7|,$$

se $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, temos que

$$\text{se } 0 < |x+1| < \delta, \text{ então, } |f(x)+7| = 3|x+1| < 3\delta = 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -7.$ ■

Exemplo 2.1.3 *Prove que* $\lim\limits_{x\to 2}(x^2) = 4$.

Solução: Seja $\epsilon > 0$. Temos que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2) = 4 \Leftrightarrow \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-2| < \delta$ sempre que $|x^2-4| < \epsilon$. Como está sendo considerado valores de x próximos a 2, segue que $|x+2| > 0$ e, por isso,

$$|x-2| = \frac{|x-2|.|x+2|}{|x+2|} = \frac{|x^2-4|}{|x+2|}.$$

Assim,

$$|x-2| < \delta \Leftrightarrow |x^2-4| < \delta|x+2|.$$

Agora é precisamos fazer uma estimativa para $|x+2|$. Na definição de limite esperamos que os números ϵ e δ sejam de valores pequenos e, por isso, podemos considerar $\delta \leq 1$. Assim,

$$|x-2| < \delta \leq 1 \Leftrightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < x+2 < 5 \Leftrightarrow -5 < x+2 < 5 \Leftrightarrow |x+2| < 5.$$

Logo, se $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{5}\right\}$, segue que se $0 < |x-2| < \delta$, então, $|x^2-4| < \epsilon$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}(x^2) = 4.$ ■

Nesse último exemplo simples, podemos perceber que o cálculo de limite de funções por definição pode se tornar uma tarefa árdua, pois achar as estimativas de δ pode ser uma tarefa extremamente complexa. Por isso, serão apresentadas várias propriedade relacionadas ao cálculo do limite de funções, com a finalidade de tornar o cálculo de limites mais prático.

Teorema 2.1.1 *O limite de funções reais de uma variável real apresenta as seguintes propriedades:*

a) Se o limite de uma função existe, então, ele é único, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x\to a} f(x) = L_2, \text{ então, } L_1 = L_2.$$

b) O limite da função constante é a própria constante, ou seja,

$$\text{se } c \in \mathbb{R}, \text{ então, } \forall\ a \in \mathbb{R} \text{ temos que } \lim_{x\to a} c = c.$$

c) O limite da função $f(x) = x$ quando x tende a a é o próprio a, ou seja,

$$\forall a \in \mathbb{R} \text{ temos que } \lim_{x\to a} x = a.$$

d) O limite da soma de duas funções é igual a soma dos limites de cada uma das funções, ou seja

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = M, \text{ então, } \lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M.$$

e) Generalizando, se $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \cdots, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)\right] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n.$$

f) O limite do produto de duas funções é igual ao produto dos limites de cada uma das funções, ou seja

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = M, \text{ então, } \lim_{x\to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = L \cdot M.$$

g) Generalizando, se $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \cdots, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot (\cdots) \cdot f_n(x)\right] = L_1 \cdot L_2 \cdot (\cdots) \cdot L_n.$$

h) O limite de uma função elevado a uma potência é igual a potência do limite da função, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } n \in \mathbb{N}, \text{ então, } \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n.$$

i) O limite do quociente de duas funções é igual ao quociente dos limites de cada uma das funções, desde que o limite da função do denominador seja não nulo, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0, \text{ então, } \lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}.$$

j) O limite da raiz de uma função é igual a raiz do limite da função, desde que o limite da função seja não negativo se o índice da raiz for par, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ e } n \in \mathbb{N}, \text{ então, } \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ com } L \geq 0 \text{ se } n \text{ par.}$$

Demonstração: As demonstrações dessas propriedades não serão feitas nessas notas. Elas podem ser encontradas em qualquer um dos livros de Referência. ■

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 2.1.4 *Calcule o valor de* $\lim\limits_{x\to 3}[x^2+7x-5]$.

Solução: Temos que

$$\lim_{x\to 3}[x^2+7x-5]=\left[\lim_{x\to 3}x\right]^2+7\left[\lim_{x\to 3}x\right]-5=3^2+7\cdot 3-5=9+21-5=25.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 3}[x^2+7x-5]=25$. ■

Nos próximos exemplos aparecem um denominador, o que nos faz ficar atendo, pois o limite do denominador não pode se anular e aparece uma raiz quadrada e, consequentemente, o limite do radicando não pode ser negativo.

Exemplo 2.1.5 *Calcule o valor de* $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$.

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to 2}[x^2+5]=9\neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}=\sqrt{\frac{\left[\lim\limits_{x\to 2}x\right]^3+2[\lim\limits_{x\to 2}x]+3}{\left[\lim\limits_{x\to 2}x\right]^2+5}}=\sqrt{\frac{2^3+2\cdot 2+3}{2^2+5}}=\sqrt{\frac{8+4+3}{4+5}}=\frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+3}{x^2+5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. ■

Exemplo 2.1.6 *Calcule o valor de* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{1+\sqrt{2x+8}}$.

Solução: Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left[1+\sqrt{2x+8}\right]=1+\sqrt{1+8}=4\neq 0$. Então,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{1+\sqrt{2x+8}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}{4}=\frac{\frac{1}{4}+1}{4}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{4}{1}}=\frac{5}{16}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{1+\sqrt{2x+8}}=\dfrac{5}{16}$. ■

No próximo exemplo, temos uma lei de formação com duas expressões. Mas ao calcularmos o limite, o que nos importa é o que acontece próximo do valor do ponto onde estamos calculando o limite, e não exatamente no valor do ponto.

Exemplo 2.1.7 *Encontre* $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$, *sabendo que* $f(x)=\begin{cases} x-3, & se \quad x\neq 4 \\ 5, & se \quad x=4 \end{cases}$.

Solução: Como desejamos o valor do limite da função quando x tende a 4, temos que $x \neq 4$ e, por isso,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}(x-3) = 4-3 = 1.$$

Portanto, $\lim_{x\to 4} f(x) = 1$. ■

Exemplo 2.1.8 *Encontre* $\lim_{x\to -2} f(x)$, *sabendo que* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}, & se \quad x \neq -2 \\ 4, & se \quad x = -2 \end{cases}$.

Solução: Como desejamos o valor do limite da função quando x tende a -2, temos que $x \neq -2$ e, por isso,

$$\frac{x^2+5x+6}{x+2} = \frac{(x+2)(x+3)}{x+2} = x+3$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}(x+3) = -2+3 = 1.$$

Portanto, $\lim_{x\to -2} f(x) = 1$. ■

Os próximos exemplos são casos que chamamos de *Indeterminação*. Observe que temos o limite do numerador sendo zero e o limite do denominador também sendo zero. Nesse tido de caso, é preciso analisar caso a caso, pois cada um pode levar a um resultado específico.

Exemplo 2.1.9 *Dado* $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x-5}$, *encontre* $\lim_{x\to 5} f(x)$.

Solução: Observe que $x^2-25 = (x-5)(x+5)$ e como $x \to 5$, segue que $x-5 \neq 0$, então,

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}[x+5] = 5+5 = 10.$$

Portanto, $\lim_{x\to 5} f(x) = 10$. ■

Exemplo 2.1.10 *Dado* $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-x-12}$, *encontre* $\lim_{x\to 4} f(x)$.

Solução: Observe que $x^2-x-12 = (x-4)(x+3)$ e como $x \to 4$, segue que $x-4 \neq 0$, então,

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4+3} = \frac{1}{7}.$$

Portanto, $\lim_{x\to 4} f(x) = \dfrac{1}{7}$. ■

Exemplo 2.1.11 *Dado* $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, *encontre* $\lim_{x\to 4} g(x)$.

Solução: Observe que $x \to 4$ e, por isso, podemos considerar que $x > 0$ e, por isso, $x = |x| = (\sqrt{x})^2$. Assim,

$$x - 4 = (\sqrt{x})^2 - 2^2 = (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2).$$

Daí,

$$\lim_{x\to 4} g(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

■

Exemplo 2.1.12 *Dado* $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{8-x}$, *encontre* $\lim_{x\to 8} f(x)$.

Solução: Dos produtos notáveis, temos que

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Assim considerando $a = \sqrt[3]{x}$ e $b = 2$, temos que

$$8 - x = (\sqrt[3]{x} - 2)\big((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 2 + 2^2\big).$$

Daí,

$$\lim_{x\to 8} f(x) = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{8-x} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{-(\sqrt[3]{x}-2)\big((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\cdot 2 + 2^2\big)} = -\lim_{x\to 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} =$$

$$= -\frac{1}{4+4+4} = -\frac{1}{12}.$$

■

Em alguns casos, podemos reescrever a definição de limite de uma função real de uma variável real de uma maneira equivalente a apresentada na Definição 2.1.1. Essas definições são apresentadas na observação a seguir.

Observação 2.1.1 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida para todo número de algum intervalo aberto $I \subset X$, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Se o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L, então, temos que são equivalentes as seguintes definições:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(t+a) = L.$$

■

Agora, pratique bastante fazendo os exercícios a seguir. Se possível, faça mais exercícios. Bons estudos.

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1 *Use a definição de limites de funções para provar cada um dos limites a seguir.*

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x-1)=3$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+4)=8$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}(5x-3)=-8$;

d) $\lim\limits_{x\to -2}(2+5x)=-8$;

e) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2)=9$;

f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Exercício 2.2.2 *Calcule o valor de cada um dos limites abaixo.*

a) $\lim\limits_{x\to 0}(3-7x-5x^2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-7x+2)$;

c) $\lim\limits_{x\to -1}(-x^5+6x^4+2)$;

d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2x+7)$;

e) $\lim\limits_{x\to -1}[(x+4)^3(x+2)^{-1}]$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}[(x-2)^{10}(x+4)^2]$;

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{3x-1}$;

h) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t+3}{t+2}$;

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

j) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2+5t+6}{t+2}$;

k) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-5t+6}{t-2}$;

l) $\lim\limits_{s\to \frac{1}{2}}\dfrac{s+4}{2s}$;

m) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{2x+3}$;

n) $\lim\limits_{x\to 7}(3x+2)^{2/3}$;

o) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{2x^2-x}{3x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{2}}{3x-4}$;

q) $\lim\limits_{x\to 5}(3x-7)$;

r) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)$;

s) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+8)$;

t) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-5}{5x-1}$;

u) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-5}{2t^3+6}$;

v) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{8x+1}{x+3}}$;

w) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$;

Exercício 2.2.3 *Calcule o valor de cada um dos limites abaixo.*

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$;

c) $\lim\limits_{x\to \frac{-3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$;

d) $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+8}{y+2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{2x^2+7x+3}}$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$;

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$;

j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^3+2x^2+6x+5}$;

k) $\lim\limits_{y\to 4}\dfrac{2y^3-11y^2+10y+8}{3y^3-17y^2+16y+16}$;

l) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$.

m) $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{2t^3-11t^2+10t+8}{3t^3-17t^2+16t+16}$;

n) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$;

Exercício 2.2.4 *Se* $f(x)=x^2+5x-3$, *mostre que* $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$.

Exercício 2.2.5 *Se* $f(x)=2x^3+7x-1$, *mostre que* $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$.

Exercício 2.2.6 *Se* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$, *mostre que* $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{6}$, *mas* $f(0)$ *não está definida.*

Exercício 2.2.7 *Dada a função f, definida por*

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & se\ x\neq 2 \\ 1, & se\ x=2 \end{cases},$$

encontre, se existir, $\lim_{x\to 2} f(x)$. *Nesse caso, mostre que* $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$ *e faça um esboço do gráfico de f.*

Exercício 2.2.8 *Dada a função f, definida por*

$$f(x)=\begin{cases} x^2-9, & se\ x\neq -3 \\ 4, & se\ x=-3 \end{cases},$$

encontre, se existir, $\lim_{x\to -3} f(x)$. *Nesse caso, mostre que* $\lim_{x\to -3} f(x)\neq f(-3)$ *e faça um esboço do gráfico de f.*

Exercício 2.2.9 *Sendo* $f(x)=x^3-2x^2+x-1$, *então, calcule o valor de* $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$, *sendo* $a\in\mathbb{R}$.

Exercício 2.2.10 *Sendo* $f(x)=x^2+3x-7$, *então, calcule o valor de* $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$, *sendo* $a\in\mathbb{R}$.

Exercício 2.2.11 *Sendo* $f(x)=-x^4+1$, *então. calcule o valor de* $\lim_{t\to 0}\dfrac{f(a+t)-f(a)}{t}$, *sendo* $a\in\mathbb{R}$.