Capítulo 1

Números Reais e Funções reais de uma variável

Nesse capítulo serão estudados os *Conjuntos Numéricos* e os *Intervalos de Números Reais* (seção 1.1), as *Desigualdades em* $\mathbb{R}$ (seção 1.3), o *Valor Absoluto* (seção 1.5), a definição e algumas propriedades envolvendo *Funções* reais de uma variável real (seção 1.7), a *Paridade* e a *Bijetividade* de funções reais de uma variável real (seção 1.9) e algumas das funções reais de uma variável real mais utilizadas e suas propriedades (seção 1.11) como, por exemplo, as polinomiais, trigonométricas, etc. No final desse capítulo, espera-se que todos consigam trabalhar com as funções de modo prático e eficaz.

1.1 Conjuntos Numéricos e Intervalos de Números Reais

A necessidade desenvolvida pela humanidade de contar objetos, fez com que as pessoas criassem símbolos para os números. O conjunto formado por todos os números usados para contar objetos é chamado de **Conjunto dos Números Naturais**, sendo esse conjunto representado por:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

Depois que começamos a contar os objetos, foi natural começar a fazer operações com esses números, principalmente para comparar quantidades. Como não era possível relacionar a subtração a quaisquer dois números naturais (pois quando a quantidade a ser retirada era maior do que se tinha), foi necessário acrescentar números a esquerda do zero.

Esses números a esquerda de zero tinham a mesma distância do zero que o seu correspondente natural, porém tinha direção oposta e, por isso, são chamamos de *Números Negativos*. Daí, o conjunto formado por todos os números naturais, o zero e todos os números negativos é chamado de **Conjunto dos Números Inteiros**. Ele é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Agora existem três grupos de números: os **positivos**, os **negativos** e o **nulo**. Dessa forma, é possível representar apenas uma parte de qualquer conjunto numérico.

Se deseja excluir o zero de um conjunto acrescentamos um asterisco ao conjunto. Agora, se desejamos excluir os números negativos do conjunto numérico, então, acrescentamos o sinal de positivo na representação do conjunto. Por outro lado, de desejamos excluir os números positivos de um conjunto numérico, acrescentamos o sinal negativo na representação do conjunto. Assim, para os números inteiros temos:

- o conjunto dos números inteiros não-nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots\}$;
- o conjunto dos números inteiros não-negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$;
- o conjunto dos números inteiros não-positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\cdots, -2, -1, 0\}$;
- o conjunto dos números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}$;
- o conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\cdots, -2, -1\}$.

Da mesma forma que a subtração, a divisão entre quaisquer dois números inteiros nem sempre existia e, por isso, foi necessário ampliar os conjuntos numéricos para abranger esses novos elementos que surgiam na divisão. Sendo assim, outro conjunto numérico importante teve que surgir, o conjunto formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração, ou seja,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ é chamado de **Conjunto dos Números Racionais**. Além disso, é possível perceber que todo número inteiro é também um número racional, visto que se $a \in \mathbb{Z}$, então, $a = \frac{a}{1}$. De uma maneira bem simples, podemos dizer que o conjunto dos números racionais é formado por todos os números inteiros, todas as frações, todos os decimais com parte decimal exata, todas as dízimas periódicas e todas as raízes exatas. Da mesma forma que mencionado anteriormente, é possível estabelecer o conjunto dos números racionais não nulos ($\mathbb{Q}^*$), o conjunto dos números racionais positivos ($\mathbb{Q}_+^*$), etc., para isso, basta utilizar a simbologia apropriada (como a utilizada para os números inteiros).

Existem números que não fazem parte do conjunto dos números racionais. Por isso, foi necessário criar o conjunto formado por todos os números que não podem ser escritos na forma de fração. Esse conjunto é chamado de **Conjunto dos Números Irracionais**, sendo esse representado por:

$$\mathbb{I} = \{x; x \notin \mathbb{Q}\}.$$

O conjunto dos números irracionais é formado por todas as dízimas não-periódicas e todas as raízes não-exatas.

Podemos visualizar os conjuntos numéricos Racionais e Irracionais como na Figura 1.1.

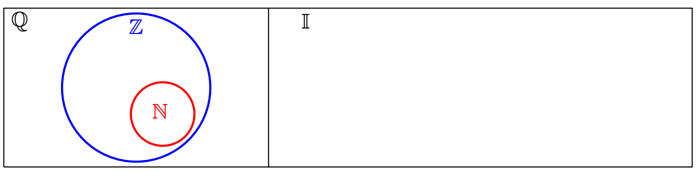

Figura 1.1: Representação da união dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

O conjunto numérico que é importante para esse curso é obtido com a união do conjunto dos números irracionais e o conjunto dos números racionais. Esse conjunto é chamado de **Conjunto dos Números Reais**, que é representado por:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Definição 1.1.1 *No conjunto $\mathbb{R}$ são definidas duas operações, chamadas de*

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array} \textit{ soma e } \begin{array}{rccc} \cdot: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array} \textit{ produto},$$

que satisfazem os seguintes axiomas, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ temos que:

a) $+$ é associativa: $a+(b+c)=(a+b)+c$;

b) $+$ é comutativa: $a+b=b+a$;

c) $\exists!$ elemento neutro na $+$, ou seja, $\exists!\ 0$ em $\mathbb{R}$ tal que $a+0=a$;

d) $\exists!$ elemento oposto na $+$, ou seja, $\exists!\ -a$ em $\mathbb{R}$ tal que $a+(-a)=0$;

e) $\cdot$ é associativa: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$;

f) $\cdot$ é comutativa: $a\cdot b=b\cdot a$ ou simplesmente $ab=ba$;

g) $\exists!$ elemento neutro no $\cdot$, ou seja, $\exists!\ 1$ em $\mathbb{R}$ tal que $a\cdot 1=a$;

h) $\exists!$ elemento inverso no $\cdot$, ou seja, $\exists!\ a^{-1}$ em $\mathbb{R}^*$ tal que $a\cdot(a^{-1})=1$;

i) Vale a distributiva do $\cdot$ em relação a $+$, ou seja, $a(b+c)=ab+ac$.

■

Por isso, o conjunto $(\mathbb{R},+,\cdot)$ é chamado de **Corpo**. A seguir são apresentadas algumas observações importantes sobre o conjunto dos números reais.

Observação 1.1.1 *a) A soma e o produto de números reais também é um número real e por esse motivos dizemos que o conjunto dos números reais é fechado em relação a soma e em relação ao produto.*

b) A subtração é um caso particular da soma, visto que $a-b=a+(-b)$ e, por isso, não é necessário definir a subtração.

c) A divisão é um caso particular do produto, visto que $\dfrac{a}{b}=a.\dfrac{1}{b}=a.b^{-1}$ e, por isso, não é necessário definir a divisão.

d) O único número real que não possui inverso multiplicativo é o zero.

■

Portanto, o conjunto dos números reais é formado por todos os números conhecidos, exceto, as raízes de índice par com radicando negativo. Por exemplo, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-81}$, etc., não são números reais. Com isso, podemos associar $\mathbb{R}$ com uma reta numérica, da seguinte maneira: tome uma reta e indique uma direção de crescimento. Em seguida, escolha um ponto para ser o zero (a origem). Dai, o ponto que estiver a uma distância x da origem corresponderá ao número $|x|$ de forma que se ele estiver antes da origem ele será o $x < 0$ e se ele estiver depois da origem ele corresponderá ao $x > 0$.

Assim, todos os pontos da reta numérica representam algum número real e, por isso, sempre que for considerado uma quantidade de pontos entre dois números reais a e b (com $a < b$), na reta numérica, temos uma infinidade de números que formam o chamado *Intervalo* de números reais. Os *Intervalos Numéricos Limitados* entre a e b são definidos como a seguir:

a) *Intervalo Degenerado*: formado por um único ponto, ou seja, $\{a\}$.

b) *Intervalo Aberto* entre a e b é o conjunto formado por todos os números entre a e b, ou seja, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$.

c) *Intervalo Fechado* entre a e b é o conjunto formado por todos os números entre a e b incluindo a e b, ou seja, é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$.

d) *Intervalo Semiaberto à Esquerda* (ou *Intervalo Semifechado à Direita*) entre a e b é o conjunto formado por todos os números entre a e b incluindo b, ou seja, é o conjunto $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$.

e) *Intervalo Semiaberto à Direita* (ou *Intervalo Semifechado à Esquerda*) entre a e b é o conjunto formado por todos os números entre a e b incluindo a, ou seja, é o conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$.

Para ilustrar cada um desses intervalos, observe a Figura 1.2. Em (a) temos a representação de um intervalo degenerado e em (b) temos a representação de um intervalo fechado entre a e b; em (c) temos a representação de um intervalo aberto entre a e b. Já em (d) temos a representação de um intervalo semiaberto à esquerda entre a e b e em (e) temos a representação do intervalo semiaberto à direita entre a e b.

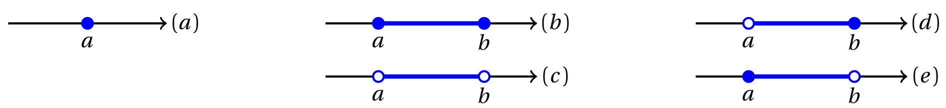

Figura 1.2: Representação dos possíveis intervalos numéricos limitados entre a e b.

Existem também os intervalos **Ilimitados**, que são os intervalos que tomam todos os números maiores, ou menores, do que um determinado valor, como definidos a seguir:

a) *Semirreta Aberta à Esquerda* de a: é o conjunto formado por todos os números menores do que a, ou seja, $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$.

b) *Semirreta Fechada à Esquerda* de a: é o conjunto formado por todos os números menores do que a, incluindo a, ou seja, $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$.

c) *Semirreta Aberta à Direita*: é o conjunto formado por todos os números maiores do que a, ou seja, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$.

d) *Semirreta Fechada à Direita*: é o conjunto formado por todos os números maiores do que a, incluindo a, ou seja, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$.

e) *Reta numérica*: é o conjunto formado por todos os números reais, ou seja, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[= \{x; x \in \mathbb{R}\}$.

Novamente, para ilustrar cada um desses intervalos, observe a Figura 1.3. Em (b) temos a representação de uma semirreta aberta à esquerda de a e em (c) temos a representação de uma semirreta fechada à esquerda de a. Já em (d) temos a representação de uma semirreta aberta à direita de a e em (d) temos a representação de uma semirreta aberta à direita de a. Por fim, em (a) temos a representação do intervalo ilimitado tanto à esquerda quanto à direita.

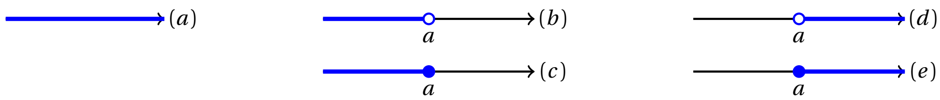

Figura 1.3: Representação dos intervalos numéricos ilimitados.

Não se esqueça que os intervalos numéricos são conjuntos e, por isso, podemos efetuar todas as operações conhecidas para conjunto (como as operações de *União*, *Intersecção*, *Diferença*, etc.) entre dois ou mais intervalos. Vejamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.1.1 *Sendo* $A = [-6, 3]$, $B =]0, 6[$ *e* $C =]-\infty, 1]$, *efetue cada uma das operações a seguir:* $A \cup B$, $B \cap C$ *e* $C \setminus A$.

Solução: Para uma resolução rápida desse exemplo, considere duas retas paralelas e sobre cada uma represente um dos conjuntos numéricos, como visto na Figura 1.4.

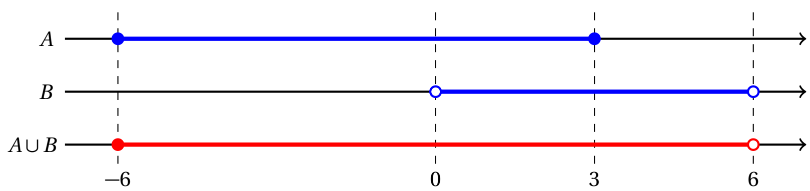

Figura 1.4: Ilustração da obtenção do conjunto $A \cup B$ do Exemplo 1.1.1.

Como o conjunto união é formado por todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos, segue que $A \cup B = [-6, 6[$.

O conjunto intersecção é formado por todos os elementos que pertence ao dois conjuntos ao mesmo tempo. Por isso, para obter o conjunto intersecção dos conjuntos B e C, e utilizando um processo similar ao utilizado no caso anterior, temos que $B \cap C =]0.1]$, como visto na Figura 1.5.

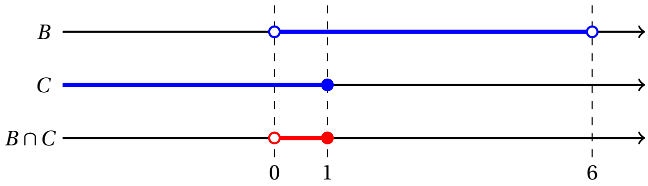

Figura 1.5: Ilustração da obtenção do conjunto $B \cap C$ do Exemplo 1.1.1.

Por fim, segue que o conjunto diferença é formado por todos os elementos que pertencem ao primeiro conjunto e não pertencem ao segundo. Assim, da Figura 1.6, segue que $C \setminus A =]-\infty, -6[$.

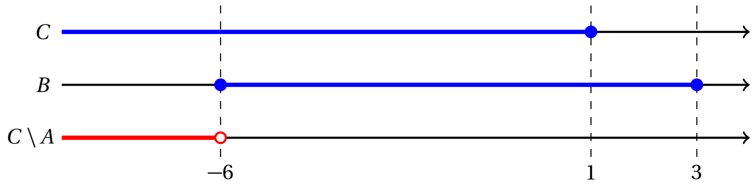

Figura 1.6: Ilustração da obtenção do conjunto $C \setminus A$ do Exemplo 1.1.1.

■

Agora, faça alguns exercícios para treinar e fixar os conceitos aqui apresentados. Bons estudos....

1.2 Exercícios

Exercício 1.2.1 *Considere os conjuntos* $A = [-2,4]$, $B =]-3,3]$, $C = [0,6[$ *e* $D =]-2,6]$. *Faça cada uma das operações desejadas:* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $C \cap D$, $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap D$, $A \cup B \cup D$, $A \cap C \cap D$, $A \cup C \cup D$ $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $A - D$, $D - A$, $B - C$; $C - B$, $B - D$, $D - B$, $C - D$, $D - C$.

Exercício 1.2.2 *Considere os conjuntos* $A = [-2, +\infty[$, $B =]-\infty, 3]$, $C =]3, +\infty[$ *e* $D =]-\infty, -5[$. *Faça cada uma das operações desejadas:* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $C \cap D$, $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap D$, $A \cup B \cup D$, $A \cap C \cap D$, $A \cup C \cup D$ $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $A - D$, $D - A$, $B - C$; $C - B$, $B - D$, $D - B$, $C - D$, $D - C$.

Exercício 1.2.3 *Considere os conjuntos* $A =]-1, 5[$, $B =]-\infty, 5]$, $C = [-1, +\infty[$ *e* $D = [-1, 5]$. *Faça cada uma das operações desejadas:* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $A \cap D$, $A \cup D$, $B \cap C$, $B \cup C$, $B \cap D$, $B \cup D$, $C \cap D$, $C \cup D$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap D$, $A \cup B \cup D$, $A \cap C \cap D$, $A \cup C \cup D$ $A - B$, $B - A$, $A - C$, $C - A$, $A - D$, $D - A$, $B - C$; $C - B$, $B - D$, $D - B$, $C - D$, $D - C$.