Capítulo 4

As Integrais Curvilíneas

Nesse capítulo dedicaremos os nossos esforços no estudo das *Integrais Curvilíneas*. Iniciamos na Seção 4.1 estudando a *Integral de Linha em Campos Escalares* e na Seção 4.3 algumas de suas aplicações. Depois, na Seção 4.5 estudaremos as *Integrais de Linha em Campos Vetoriais* e para fechar o tema, na Seção 4.7 estudaremos o Teorema de Green. Depois disso passaremos a estudar as superfícies e, dessa forma, estudaremos na Seção 4.9 *Orientação de Superfícies* para estudarmos na Seção 4.11 a *Integral de Superfície em Campos Escalares*. Além disso, estudaremos na Seção 4.13 a Integral de Superfície em Campos Vetoriais e terminaremos o curso na Seção 4.15 estudando os teoremas de *Stokes* e de *Gauss* (o último conhecido por *Teorema da Divergência*).

4.1 A Integral de Linha em Campos Escalares

Vamos agora construir a ideia das *Integrais de Linha em Campos Escalares*. Para isso, considere uma curva suave c, orientada, com ponto inicial A e o ponto final B, como visto na Figura 4.1.

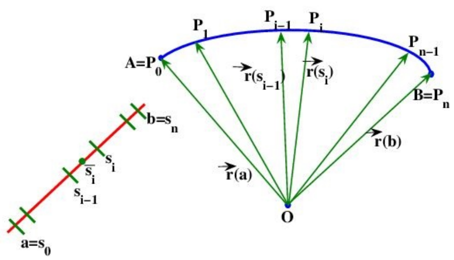

Figura 4.1: Ilustração para construção da Integral de Linha.

Seja $f(x,y,z)$ um campo escalar definido em cada ponto de c. Divida a curva c em n pequenos arcos pelos pontos

$$A = P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n = B.$$

Denote por ΔS_i o comprimento do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$. Em cada arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$, escolha um ponto Q_i. Calcule o valor de f no ponto Q_i e multiplique esse valor por ΔS_i e forme a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta S_i.$$

Se o limite dessa soma existir, quando o máximo de ΔS_i tende a zero, então, chamaremos esse valor de *Integral de Linha*, como apresentado a seguir.

Definição 4.1.1 *A Integral de Linha de f ao longo da curva c, do ponto A até o ponto B, denotada por $\int_c f dS$, é definida por:*

$$\int_c f dS = \lim_{max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(Q_i)\Delta S_i.$$

Observação 4.1.1 *a) Na Definição 4.1.1, temos que a curva c é chamada de Caminho de Integração.*

b) Se a curva c é suave por partes, temos que a integral de linha sobre c é definida como sendo a soma das integrais de linha sobre cada parte suave de c.

Para calcular a integral de linha separaremos em dois casos. No primeiro caso vamos supor que a curva está parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, vamos supor que $||\vec{r}|| = 1$. No segundo caso vamos considerar que a parametrização é qualquer.

Cálculo da Integral de Linha para curvas parametrizadas pelo comprimento de arco

Suponha que c esteja dada por $\vec{h}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, com $s \in [a, b]$ sendo o parâmetro comprimento de arco de c. Nesse caso, a divisão da curva C pelos pontos $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n$ origina uma partição no intervalo $[a, b]$, dadas pelos pontos $a = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b$, como visto na Figura 4.1.

Logo, o ponto Q_i na Definição 4.1.1 tem coordenadas $(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i), z(\bar{s}_i))$, onde $\bar{s}_i$ é algum ponto do intervalo $[s_{i-1}, s_i]$. A soma na Definição 4.1.1 pode ser reescrita na forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i), z(\bar{s}_i))\Delta S_i.$$

Essa é a *Soma de Riemann* da função $f(x(s), y(s), z(s))$ e, por isso, o limite da Definição 4.1.1 equivale a integral definida dessa função e, portanto,

$$\int_c f dS = \int_a^b f(x(s), y(s), z(s))ds = \int_a^b f(\vec{r}(s))ds.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 4.1.1 *Calcule* $\int_c (x+2y)dS$, *onde* C *é a semi circunferência dada pela Figura 4.2.*

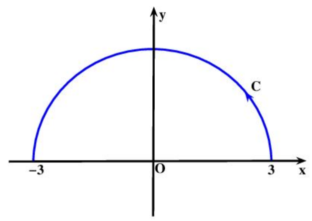

Figura 4.2: Caminho de integração para o Exemplo 4.1.1.

Solução: Temos que uma parametrização para a circunferência é dada por $\vec{r}(t) = (3cos(t), 3sen(t))$, e como estamos interessados apenas na semicircunferência superior, segue que $0 \leq t \leq \pi$.

Como $\vec{r}'(t) = (-3sen(t), 3cos(t))$, então, $\left|\left|\frac{d}{dt}(\vec{r}(t))\right|\right| = 3 \neq 1$. Logo, essa parametrização não é pelo comprimento de arco. Assim, como a função comprimento de arco é dada por

$$s(t) = \int_0^t \left|\left|\frac{d}{dt}(\vec{r})\right|\right| du,$$

segue que $s(t) = 3t$, assim, uma parametrização pelo comprimento de arco para a curva fica dada por $\vec{h}(s) = \left(3\cos\left(\frac{s}{3}\right), 3\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right)\right)$, $0 \leq s \leq 3\pi$. Então,

$$\int_c (x+2y)dS = \int_0^{3\pi} \left(3\cos\left(\frac{s}{3}\right) + 6\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right)\right) ds =$$

$$= \left(9\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right) - 18\cos\left(\frac{s}{3}\right)\right)\Big|_0^{3\pi} = 36.$$

■

Exemplo 4.1.2 *Calcule* $\int_c (x^2+y^2-z)dS$, *onde* c *é a hélice circular dada por* $\vec{r}(t) = (cos(t), sen(t), t)$ *do ponto* $P = (1,0,0)$ *até* $Q = (1,0,2\pi)$.

Solução: Como $\vec{r}(t) = (cos(t), sen(t), t)$, segue que esta é uma parametrização para a curva c. Assim, tendo que $\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)) = (-sen(t), cos(t), 1)$, segue que

$$\left|\left|\frac{d}{dt}(\vec{r}(t))\right|\right| = \sqrt{2}.$$

Então, essa parametrização não é pelo comprimento de arco. Temos que a função comprimento de arco fica dada por

$$s(t) = \int \left|\left|\frac{d}{dt}(\vec{r}(t))\right|\right| = \sqrt{2}t.$$

Dessa forma, reparametrizando a curva c pelo comprimento de arco, obtemos:

$$\vec{h}(s) = \left(cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right).$$

Como $0 \leq t \leq 2\pi$, segue que $0 \leq s \leq 2\sqrt{2}\pi$. Assim,

$$\int_c (x^2 + y^2 - z)dS = \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \left(cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + sen^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{s}{\sqrt{2}} \right) ds =$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}\pi} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) ds = \left(s - \frac{s^2}{2\sqrt{2}} \right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}\pi} = 2\sqrt{2}\pi(1-\pi).$$

■

Cálculo da Integral de Linha para curvas parametrizadas de forma geral

Agora vamos falar do cálculo da integral de linha para curvas com uma parametrização qualquer. Seja c uma curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$, onde t é um parâmetro qualquer. Para calcular a integral, observe que

$$\int_c f dS = \int_c^d f(x(s), y(s), z(s))ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\frac{ds}{dt}dt.$$

Como $s(t) = \displaystyle\int \left|\left| \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] \right|\right| dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \left|\left| \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] \right|\right|$ e, dessa forma,

$$\int_c f dS = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left|\left| \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)] \right|\right| dt.$$

Exemplo 4.1.3 *Resolva o Exemplo 4.1.2 sem parametrizar pelo comprimento de arco.*

Solução:

$$\int_c (x^2 + y^2 - z)dS = \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) - t)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

e, por isso, $\displaystyle\int_c (x^2 + y^2 - z)dS = 2\sqrt{2}\pi(1-\pi)$, sendo esse o mesmo resultado obtido anteriormente. ■

Exemplo 4.1.4 *Calcule* $\displaystyle\int_c xydS$, *onde* C *é a intersecção das superfícies* $x^2 + y^2 = 4$ *e* $y + z = 8$.

Solução: Tomando $x(t) = 2cos(t)$ e $y(t) = 2sen(t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$, segue que $x^2 + y^2 = 4$. Além disso, sendo $y + z = 8$, temos que $z(t) = 8 - 2sen(t)$. Assim, uma parametrização para o caminho de integração é dado por

$$\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), 8 - 2sen(t)), 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Derivando o vetor $\vec{r}$ em relação a t, chegamos a

$$\left|\left|\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)]\right|\right| = (-2sen(t), 2cos(t), -2cos(t)) \Rightarrow \left|\left|\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)]\right|\right| = 2\sqrt{1 + cos^2(t)}.$$

Então,

$$\int_c xydS = \int_0^{2\pi} 4sen(t)cos(t)2\sqrt{1 + cos^2(t)}dt.$$

Chamando u de $1 + cos^2(t)$, teremos que $du = -2sen(t)cos(t)dt$. Consequentemente,

$$\int_c xydS = -4\int_0^{2\pi} \sqrt{u}du = -4\frac{2}{3}\sqrt{(1 + cos^2)^3}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

■

Vimos que o cálculo da integral de linha pode ser feito utilizando integrais de Riemman. Dessa forma, podemos supor (e também provar), que são válidas as propriedades apresentadas a seguir.

Observação 4.1.2 *Suponha que c seja uma curva suave ou suave por partes, e suponha também que f e g sejam funções contínuas em todos os pontos de c. Então, é válido que:*

a) $\displaystyle\int_c kfdS = k\int_c fdS$, $\forall$ *k constante;*

b) $\displaystyle\int_c (f + g)dS = \int_c fdS + \int_c gdS$;

c) Seja C uma curva de ponto inicial A e ponto final B. Seja P um ponto entre A e B. Considere c_1 a curva de A a P e considere c_2 a curva de P a B. Então, $\displaystyle\int_c fdS = \int_{c_1} fdS + \int_{c_2} fdS$;

d) $\displaystyle\int_c fdS = \int_{-c} fdS$, *onde $-c$ representa a curva c orientada no sentido oposto.*

Exemplo 4.1.5 *Calcule* $\displaystyle\int_c [3xy]dS$, *sendo C o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (1,2)$, no sentido anti-horário.*

Solução: Uma Ilustração do caminho de integração pode ser vista na Figura 4.3.

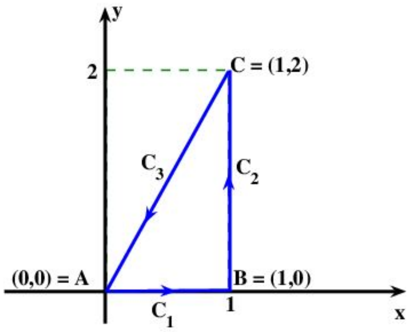

Figura 4.3: Caminho de integração do Exemplo 4.1.5.

Temos que a curva c é suave por partes, assim, dividindo a curva em três partes suaves (c_1, c_2 e c_3), é possível calcular a integral de linha, que vai ser dada pela soma das integrais de linha obtidas nas três partes.

Tome c_1 como sendo o caminho que vai de A a B. Então, temos que c_1 pode ser parametrizado por $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$, com $t \in [0, 1]$. Logo, $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1)(t) = (1, 0)$ e, por isso, $\left|\left|\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_1)(t)\right|\right| = 1$. Assim,

$$\int_{c_1} 3xydS = \int_0^1 3 \cdot t \cdot 0 \cdot 1dt = 0.$$

Tome c_2 como sendo o caminho que vai de B a C. Então, temos que c_2 pode ser parametrizado por $\vec{r}_2(t) = (1, t)$, com $t \in [0, 2]$. Logo, $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_2)(t) = (0, 1)$ e, por isso, $\left|\left|\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_2)(t)\right|\right| = 1$. Assim,

$$\int_{c_2} 3xydS = \int_0^2 3 \cdot 1 \cdot t \cdot 1dt = \left.\frac{3t^2}{2}\right|_0^2 = 6.$$

Por fim, tome c_3 como sendo a curva que vai de C a A. Então, temos que c_3 pode ser parametrizada por $\vec{r}_3(t) = (1 - t, 2 - 2t)$, com $t \in [0, 1]$. Logo, $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_3)(t) = (-1, -2)$ e, por isso, $\left|\left|\dfrac{d}{dt}(\vec{r}_3)(t)\right|\right| = \sqrt{5}$. Assim,

$$\int_{c_3} 3xydS = \int_0^1 3 \cdot (1 - t) \cdot (2 - 2t) \cdot \sqrt{5}dt = 6\sqrt{3}\int_0^1 (1 - 2t + t^2)dt = 2\sqrt{5}.$$

Portanto, como $\displaystyle\int_c 3xydS = \int_{c_1} 3xydS + \int_{c_2} 3xydS + \int_{c_3} 3xydS$, segue que,

$$\int_c 3xydS = 0 + 6 + 2\sqrt{5} = 2(3 + \sqrt{5}).$$

■

Exemplo 4.1.6 *Calcule* $\displaystyle\int_c [|x|+|y|]dS$ *e* $\displaystyle\int_{-c} [|x|+|y|]dS$*, onde c é o segmento de reta* $\overline{AB}$*, com* $A = (-2, 0)$ *e* $B = (2, 2)$*.*

Solução: Uma equação vetorial para C é dada por $\vec{r}(t) = (-2+4t, 2t)$, com $t \in [0,1]$. Portanto,

$$\int_c [|x| + |y|]dS = \int_0^1 [|-2+4t| + |2t|]dt =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} [(2-4t) + (2t)]dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 [(-2+4t) + (2t)]dt.$$

Daí,

$$\int_c [|x| + |y|]dS = [2t - 2t^2 + t^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + [-2t + 2t^2 + t^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 4\sqrt{5}.$$

Para calcular $\displaystyle\int_{-C} [|x| + |y|]dS$, observe que $-c : \vec{r}(a+b-t) = \vec{r}(1-t) = \vec{r}(t) = (2-4t, 2-2t)$, com $t \in [0,1]$, daí

$$\int_c [|x| + |y|]dS = \int_0^1 [|2-4t| + |2-2t|]dt = 4\sqrt{5}.$$

■

Faça alguns exercícios para fixar o conteúdo. Bons estudos......

4.2 Exercícios

Exercício 4.2.1 *Calcule as integrais curvilíneas em cada item abaixo.*

a) $\displaystyle\int_c [2x - y + z]dS$, *onde* C *é o segmento de reta que liga* $A = (1,2,3)$ *e* $B = (2,0,1)$;

b) $\displaystyle\int_c [3y - \sqrt{z}]dS$, *onde* C *é o arco de parábola* $z = y^2$, $x = 1$, *de* $A = (1,0,0)$ *e* $B = (1,2,4)$;

c) $\displaystyle\int_c [xz]dS$, *onde* C *é a intersecção da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *com o plano* $x = y$;

d) $\displaystyle\int_c [|y|]dS$, *onde* C *é a curva dada por* $y = x^3$ *de* $A = (-1,-1)$ *a* $B = (1,1)$;

e) $\displaystyle\int_c [y(x-z)]dS$, *onde* C *é a intersecção das superfícies* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ *com o plano* $x + z = 3$;

f) $\displaystyle\int_c [x + y)]dS$, *onde* C *é a intersecção das superfícies* $z = x^2 + y^2$ *e* $z = 4$;

g) $\displaystyle\int_c [2yx]dS$, *onde* C *é o arco de circunferência* $x^2 + y^2 = 4$ *de* $A = (2,0)$ *até* $B = (1, \sqrt{3})$;

h) $\displaystyle\int_c [x^2+y^2+z^2]dS$, *onde* C *é a intersecção das superfícies* $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$ *e* $y=2$.

Exercício 4.2.2 *Calcule* $\displaystyle\int_c (x+y)dS$, *onde* c *consiste do arco da circunferência* $x^2+y^2=1$, *saindo do ponto* $(1,0)$ *até o ponto* $(0,1)$ *no sentido anti-horário e do segmento de reta ligando os ponto* $(0,1)$ *e* $(4,3)$.

Exercício 4.2.3 *Seja* c *a curva dada pela interseção das superfícies* $x^2+y^2+z^2=R^2$ *e* $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, *com* $R>0$, *situado no primeiro octante. Determine o valor de* R *de modo que* $\displaystyle\int_c xyzdS=\frac{81\sqrt{3}}{2}$.