Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT
Eng. Mecânica - Integral

Prova	3^a Avaliação de Cálculo 1 - 17/07/2025
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÃO** ser corrigida.
- Só serão corrigidas 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a **Não** ser desconsiderada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 10:00 as 11:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Encontre o volume de um sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^3$, pelo eixo X e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ é rotacionada em torno do eixo X.

Solução: A região que dá origem ao sólido é apresentada na Figura 1.

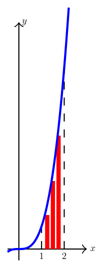

Figura 1: Região $\Re$ para calcular o volume do sólido de revolução.

Temos que a região $\Re$ é formada pelo eixo x, as retas $x = 1$ e $x = 2$ e pela função $y = x^3$, sendo essa função não negativa, para todo $x \in [1, 2]$. Assim, temos que

$$V = \pi \int_1^2 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \pi \cdot \frac{x^7}{7}\bigg|_1^2 = \pi \left(\frac{128}{7} - \frac{1}{7} \right) = \frac{127\pi}{7} \; u.v.$$

2ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):**

a) Resolva a integral $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4 + x^2}} dx$.

b) Encontre o polinômio de Maclaurin de 4^o grau para a função $f(x) = \cos(x)$.

Solução:

a) Considere $x = 2\tan(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Daí, temos que $dx = 2\sec^2(\theta)d\theta$. Então,

$$\sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + 4t\tan^2(\theta)} = 2\sqrt{1 + \tan^2(\theta)} = 2\sec(\theta).$$

Assim, calculando a integral, chegamos a

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}dx = \int \frac{2\sec^2(\theta)d\theta}{2\tan(\theta)2\sec(\theta)} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mathrm{sen}(\theta)}d\theta = \frac{1}{2}\int \csc(\theta)d\theta =$$

$$= \ln\left(\csc(\theta) - \cot(\theta)\right) + k.$$

Como $\tan(\theta) = \dfrac{x}{2}$, segue que $\cot(\theta) = \dfrac{2}{x}$ e, consequentemente,

$$\csc(\theta) = \sqrt{1 + cot^2(\theta)} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^1} = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}dx = \ln\left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} - \frac{2}{x}\right) + k,\ \ k \in \mathbb{R}.$$

b) Como $f(x) = \cos(x)$, temos que

$$(f^{(n)}) = (\cos(x), -\mathrm{sen}(x), -\cos(x), \mathrm{sen}(x), \cos(x), -\mathrm{sen}(x), \cdots).$$

Assim, para $x = 0$ temos:

$$\left(f^n\,(0)\right) = \left(1, 0, -1, 0, 1, 0, \cdots\right).$$

Consequentemente, o polinômio de Maclaurin de 4^o grau fica dado por

$$P_4(x) = f\,(0) + f'\,(0)\,x + \frac{f''\,(0)\,x^2}{2!} + \frac{f'''\,(0)\,x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}\,(0)\,x^4}{4!} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

3^a) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):**

(a) Qual o valor da área, no segundo quadrante, da região delimitada pela curva $y = e^x$, o eixo x e a reta $x = 0$?

(b) A integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}dx$ é convergente?

Solução:

(a) A região pode ser observada na Figura 2.

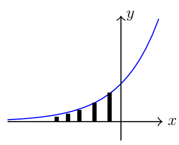

Figura 2: Região, no segundo quadrante, da região delimitada pela curva $y = e^x$, o eixo x e a reta $x = 0$.

A área da região ficada dada por

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Big|_a^0 = e^0 - \lim_{a\to-\infty} e^a = 1\ u.a..$$

(b) Temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x}{(1+x^2)^2}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{x}{(1+x^2)^2}dx.$$

Tomando $u = 1 + x^2$, temos que $du = 2x$ e, por isso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2}dx = \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2}\int_a^0 \frac{1}{u^2}du + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\int_0^b \frac{1}{u^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{u}\bigg|_a^0 - \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{u}\bigg|_0^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{1+x^2}\bigg|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1+x^2}\bigg|_0^b\right] = -\frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) = 0.$$

Portanto, a integral converge.

4ª) **Questão ( ) (Valor 6.0 Pontos):** Obtenha o valor da área da região limitada pelas curvas $y = \ln(x)$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.

Solução: A região A que queremos calcular a área é dada pela Figura 3.

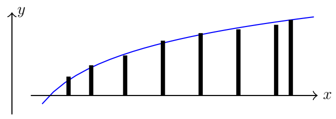

Figura 3: Região entre as curvas $y = \ln(x)$, pelo eixo x e pela reta $x = e^2$.

Temos que o valor da área procurada é dada por $A = \displaystyle\int_1^{e^2} f(x)dx$. Assim, se chamarmos $u = \ln(x)$ e $dv = dx$, segue que $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = x$. Assim, utilizando a fórmula de integração por partes, segue que:

$$\int_1^{e^2} \ln(x)dx = uv|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} vdu = \ln(x)\cdot x|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x}\cdot xdx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x)|_1^{e^2} - x|_1^{e^2} =$$

$$= e^2\ln(e^2) - e^2 - 0 + 1 = e^2 + 1.$$

5ª) **Questão( ) (Valor 6.0 Pontos):** Calcule o valor de cada uma das integrais a seguir.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx$; b) $\displaystyle\int \frac{2 - 3\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx$; c) $\displaystyle\int_0^2 xe^{4-x^2}dx$.

Solução:

a) Considere a mudança de variável dada por $u = \operatorname{sen}(x)$. Daí, segue que $du = \cos(x)dx$. Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^3du = \frac{\operatorname{sen}^4(x)}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{u^4}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

b) Temos que

$$\int \frac{2 - 3\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx = 2\int \frac{1}{\cos(2x)}dx - 3\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}dx = 2\int \sec(2x)dx - 3\int \tan(2x)dx =$$

$$= \ln|\sec(2x) + \tan(2x)| - \frac{3}{2}\ln|\sec(2x)|.$$

c) Considere a mudança de variável dada por $u = 4 - x^2$. Daí, segue que $du = -2xdx$. Assim,

$$\int_0^2 xe^{4-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du = -\frac{1}{2}e^u\bigg|_0^2 = -\frac{1}{2}e^{4-x^2}\bigg|_0^2 = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

6ª) **Questão (   ) (Valor 6.0 Pontos):** Um ponto descreve um movimento retilíneo, tal que $a(t) = 2 - 6t$. Se as condições iniciais são $v(0) = -5$ e $s(0) = 4$, determine $s(t)$.

Solução: Para uma partícula P em movimento retilíneo, a função velocidade é obtida como sendo a derivada da função posição, ou seja, $v(t) = s'(t)$. Além disso, a função aceleração é obtida como sendo a derivada da função velocidade, ou seja, $a(t) = v'(t)$. Assim, para a velocidade, temos que

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (2 - 6t)dt = 2t - 3t^2 + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Da condição $v(0) = -5$, temos que $k = -5$ e, portanto, a função velocidade é dada por

$$v(t) = -3t^2 + 2t - 5.$$

Daí, como $v(t) = s'(t)$, para a função posição temos que

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-3t^2 + 2t - 5)dt + l = -3t^3 + t^2 - 5t + k, \ k \in \mathbb{R}.$$

Novamente, aplicando a condição inicial $s(0) = 4$, temos que $k = 4$. Portanto, a função posição da partícula é nas condições do problema é a função dada por

$$s(t) = -3t^3 + t^2 - 5t + 4.$$

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!