1.11 Algumas funções particulares

Nessa seção apresentaremos as definições e as principais propriedades de algumas das funções mais utilizadas nos cursos de Cálculo. Saber fazer o estudo de sinal de funções, obter o gráfico, o que é o zero fa função, etc., são uns dos conceitos a serem usados constantemente em matemática e, por isso, é importante fazer muitos exercícios. Comecemos com a *Função Afim*.

Definição 1.11.1 *A **Função Afim** é qualquer função que associa a todo número real x ao único número real $f(x)=ax+b$, com $a\neq 0$. Portanto,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=ax+b \end{array}.$$

■

As propriedades mais importantes da função afim são listadas na Observação 1.11.1.

Observação 1.11.1 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=ax+b \end{array}$ *uma função afim. Então, temos que:*

a) *O número a é chamado de **Coeficiente Angular** e o número b é chamado de **Coeficiente Linear**.*

b) *Se $b=0$, ou seja, se $f(x)=ax$, então, a função afim é chamada de **Função Linear**.*

c) *Se $a=1$ e $b=0$, ou seja, se $f(x)=x$, então, a função afim é chamada de **Função Identidade**.*

d) *Se $a>0$, então, a função afim é **Crescente** e se $a<0$, então, a função afim é **Decrescente**.*

e) *O gráfico da função afim, dado por $Gr_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=ax+b,\ a\neq 0\}$ é uma reta.*

f) *O gráfico da função linear passa pela origem e o gráfico da função identidade é a bissetriz dos quadrantes ímpares.*

g) *O zero da função afim, ou seja, o número real tal x tal que $f(x)=0$, é o número dado por $x=\dfrac{-b}{a}$.*

h) *Temos que $f(x)$ assume valores com sinal contrário de a para todo x tal que $x<\dfrac{-b}{a}$ e $f(x)$ assume valores com o mesmo sinal de a para todo x tal que $x>\dfrac{-b}{a}$. Desta forma, o estudo de sinal da função afim fica dado pela Figura 1.23.*

Figura 1.23: Estudo de sinal da Função Afim $f(x)=ax+b$.

i) A função afim é uma bijeção. Consequentemente, a inversa de uma função afim $f(x)=ax+b$ *é a função*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(-)=\dfrac{y-b}{a} \end{array}.$$

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.1 *Seja* $f(x)=2x+3$. *Então, temos que* f *é uma função afim crescente, pois* $a=2>0$. *O gráfico da função* f *é dado por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=2x+3\right\}.$$

O zero da função f *é o número* $x=\dfrac{-3}{2}$. *Temos que a função* f *assume valores positivos para* $x>\dfrac{-3}{2}$ *e que a função* f *assume valores negativos para* $x<\dfrac{-3}{2}$. *A inversa da função* f *é dada por* $f^{-1}(y)=\dfrac{y-3}{2}$. *Um esboço do* Gr_f *é apresentado na Figura 1.24.*

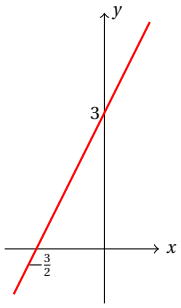

Figura 1.24: Esboço do gráfico da função $f(x)=2x+3$.

■

Exemplo 1.11.2 *Seja* $f(x)=-3x+1$. *Então, temos que* f *é uma função afim decrescente, pois* $a=-3<0$. *O gráfico da função* f *é dado por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=-3x+1\right\}.$$

O zero da função f *é o número* $x=\dfrac{1}{3}$. *Temos que* f *assume valores positivos para* $x<\dfrac{1}{3}$ *e* f *assume valores negativos para* $x>\dfrac{1}{3}$. *A inversa da função* f *é dada por* $f^{-1}(y)=\dfrac{1-y}{3}$. *Um esboço do* Gr_f *é apresentado na Figura 1.25.*

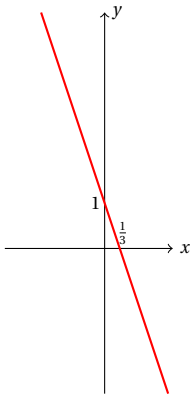

Figura 1.25: Esboço do gráfico da função $f(x) = -3x + 1$.

■

Exemplo 1.11.3 *No Movimento Retilíneo Uniforme, MRU, o espaço percorrido é uma função do tempo, expresso pela fórmula*

$$s = s_0 + v\,t,$$

onde s_0 é o espaço inicial e $v \neq 0$ é a velocidade, sendo s_0 e v constantes. Logo, o MRU é uma função afim e, por isto, o MRU uma crescente (se a velocidade for positiva) ou decrescente (se a velocidade for negativa). Temos ainda que o gráfico do MRU é representado por uma reta.

■

Agora, vamos apresentar a definição e as principais características da *Função Quadrática.*

Definição 1.11.2 *A **Função Quadrática** é qualquer função que associa a todo número real x ao único número real $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$, com $a \neq 0$. Portanto,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \end{array}.$$

■

Da mesma forma que para a função afim, existem diversas propriedades envolvendo a função quadrática. Algumas dessas propriedades são listadas na Observação 1.11.2.

Observação 1.11.2 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \end{array}$ *uma função quadrática. Então, temos que:*

a) Na função quadrática, se $a > 0$, então, sua concavidade está voltada para cima.

b) Na função quadrática, se $a < 0$, então, sua concavidade está voltada para baixo.

c) O gráfico de uma função quadrática, dado por $Gr_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = a\,x^2 + b\,x + c,\ a \neq 0\}$, é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas.

d) A função quadrática não é uma bijeção, visto que ela não é nem injetiva e nem sobrejetiva.

e) A intersecção da parábola com o eixo das abscissas define os ***Zeros*** *da função, ou seja, os valores de* $x \in \mathbb{R}$ *tais que* $f(x) = 0$. *As raízes da função quadrática são dadas por* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, *onde* $\Delta = b^2 - 4ac$.

f) A interseção da parábola com o seu eixo de simetria é chamado de ***Vértice****. As coordenadas desse ponto é dada por* $V = (x_V, y_V) = (x_V, f(x_V)) = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.

g) O conjunto imagem da função quadrática é dado por $Im_f = \{y \in \mathbb{R}; y \leq y_v\}$, *se* $a < 0$ *e* $Im_f = \{y \in \mathbb{R}; y \geq y_v\}$, *se* $a > 0$.

h) As possibilidades de esboço do gráficos da função quadrática são apresentados pela Figura 1.26.

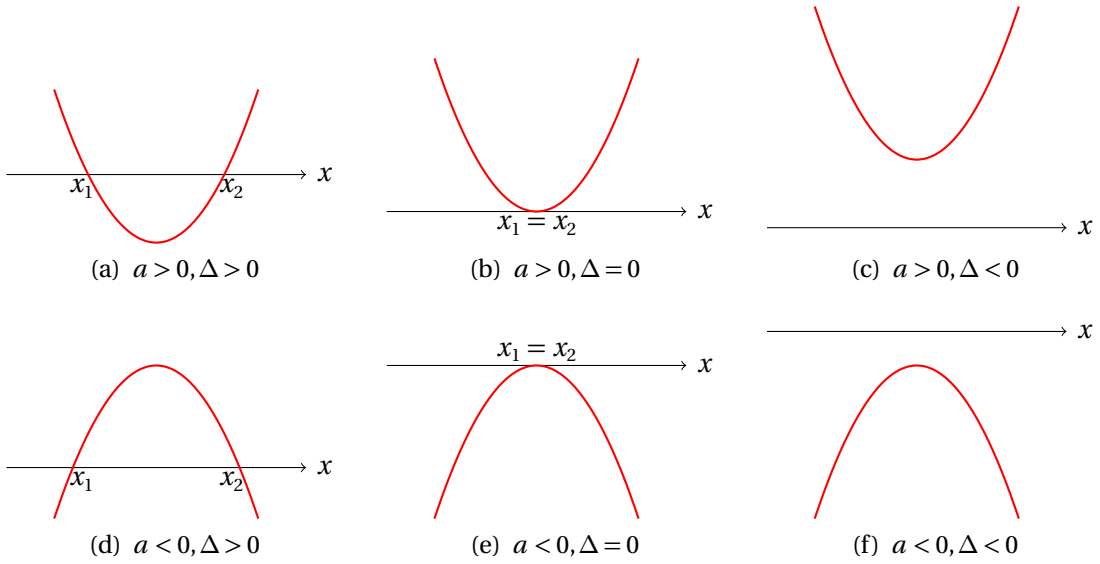

Figura 1.26: Esboço dos gráficos das funções $f(x) = ax^2 + bx + c$, para diferentes variações do sinal de a e de Δ.

O estudo de sinal da função quadrática fica dado pela Figura 1.27.

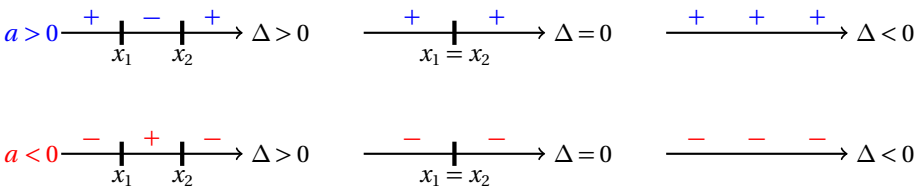

Figura 1.27: Estudo de sinal da Função Afim $f(x) = ax^2 + bx + c$.

■

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.4 *Seja* $f(x) = x^2 - 6x + 5$. *Então,* f *é uma função quadrática com concavidade voltada para cima, pois* $a = 1 > 0$. *Além disso, temos que* $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2.1} = 3$ *e* $y_v = f(x_v) = 3^2 - 6.3 + 5 = -4$ *e, por isso,* $V = (3,-4)$.

O eixo de simetria do Gr_f *é a reta* $x = 3$ *(*x *do vértice). O gráfico de* f *é dado por*

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2 - 6x + 5\right\}.$$

O conjunto imagem de f *é dado por*

$$Im_f = [y_V, +\infty[= [-4, +\infty[.$$

As raízes da função quadrática são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2},$$

ou seja, as raízes da função são $x = 1$ *ou* $x = 5$. *Um esboço do gráfico da função* f *é apresentado na Figura 1.28.*

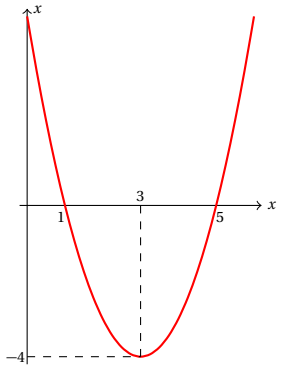

Figura 1.28: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

■

Exemplo 1.11.5 *Seja* $f(x) = -x^2 - 4x - 4$. *Então,* f *é uma função quadrática com concavidade voltada para baixo, pois* $a = -1 < 0$. *Além disso, temos que* $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot (-2)} = -2$ *e* $y_v = f(x_v) = 0$ *e, por isso, o vértice da parábola é dado por* $V = (-2,0)$.

O eixo de simetria do gráfico de f *é a reta* $x = -2$ *(*x *do vértice). O gráfico de* f *é dado por*

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x^2 - 4x - 4\right\}.$$

O conjunto imagem de f *é dado por*

$$Im_f =]-\infty, y_v] =]-\infty, 0].$$

As raízes de f são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{-2},$$

ou seja, as duas raízes da função são iguais a $x = -2$. Um esboço do gráfico da função f é apresentado na Figura 1.29.

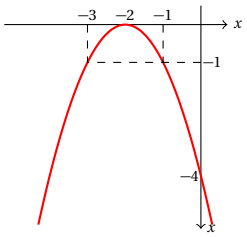

Figura 1.29: Esboço do gráfico da função $f(x) = -x^2 - 4x - 4$.

■

Exemplo 1.11.6 *Seja $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Então, f é uma função quadrática com concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$. Além disso, temos que $x_v = \frac{-(-2)}{2.1} = 1$ e $y_v = f(x_v) = 2$. Então, o vértice de f é dado por $V = (1,2)$.*

O eixo de simetria do Gr_f é a reta $x = 1$. O gráfico de f é dado por

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2 - 2x + 3\right\}.$$

O conjunto imagem de f é dado por

$$Im_f = [2, +\infty[.$$

Essa função não possui raízes reais, visto que $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 3 = -8 < 0$. Um esboço do gráfico da função f é apresentado na Figura 1.30.

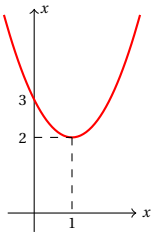

Figura 1.30: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

■

A próxima função a ser estudada é a *Função Modular*, que é uma função de grande importância para a matemática.

Definição 1.11.3 *A **Função Modular** é qualquer função que associa a todo número real x a um único número real da forma $f(x)=|x|$. Portanto,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=|x| \end{array}.$$

■

Algumas das principais propriedades da função modular estão apresentadas a Observação 1.11.3.

Observação 1.11.3 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=|x| \end{array}$ *uma função modular. Então, temos que:*

a) $D_f=\mathbb{R}$ *e* $Im_f=\mathbb{R}_+$.

b) De uma forma geral, a função modular não é injetiva e nem sobrejetiva.

c) Considere uma função modular $\begin{array}{rccc} g: & X\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x)=|f(x)| \end{array}$. *Então, os zeros da função g são todos os pontos $x\in X$ tais que $f(x)=0$.*

d) Considere uma função modular $\begin{array}{rccc} g: & X\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x)=|f(x)| \end{array}$. *Para esboçar o gráfico de g, proceda como a seguir: faça o esboço do gráfico da função f e, em seguida, "rebata" todos os pontos do esboço do gráfico da função f com valores de ordenada negativa para pontos de ordenada positiva, mantendo os pontos de ordenadas positivas.*

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.7 *Seja $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função modular dada por $g(x)=|2x+3|$. A função $f(x)=2x+3$ foi estudada no Exemplo 1.11.1, e o esboço do seu gráfico é dado pela Figura 1.24, que é representado por uma reta crescente que corta o eixo das abscissas no ponto $x=\dfrac{-3}{2}$. O zero da função g é o ponto $x=\dfrac{-3}{2}$. Então, temos que o esboço do gráfico da função g fica dado pela Figura 1.31.*

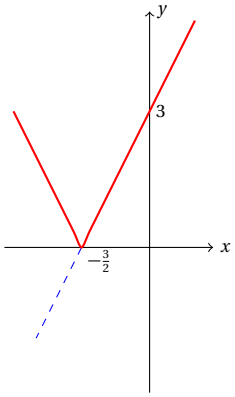

Figura 1.31: Esboço do gráfico da função $g(x)=|2x+3|$.

■

Exemplo 1.11.8 *Seja a função modular dada por* $g(x)=|x^2-6x+5|$. *A função quadrática* $f(x)=x^2-6x+5$ *foi estudada no Exemplo 1.11.4 e o esboço do gráfico é apresentado na Figura 1.28, que é uma parábola com concavidade voltada para cima e cujas raízes da função são* $x=1$ *e* $x=5$. *O esboço do gráfico de* g *é dado pela Figura 1.32.*

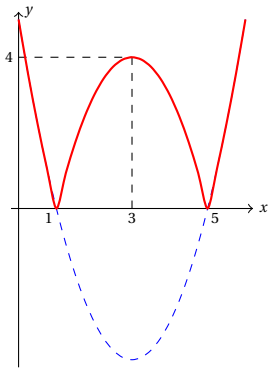

Figura 1.32: Esboço do gráfico da função $g(x)=|x^2-6x+5|$.

■

A função afim e a função quadrática são casos especiais de um grupo importante de funções dentro da matemática, que são as *Funções Polinomiais*, cuja definição é apresentada a seguir.

Definição 1.11.4 *Uma* ***Função Polinomial*** *é qualquer função que associa a todo número real* x *a um único número real da forma*

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, *com* $a_n \neq 0$, *são constantes chamadas de* ***Coeficientes****. Além disso, temos que* $n \in \mathbb{N}$ *é chamado de* ***Grau*** *da função polinomial.*

■

Algumas propriedade sobre funções polinomiais são apresentas na Observação 1.11.4.

Observação 1.11.4 *Seja* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{array}$ *uma função polinomial. Então, temos que:*

a) $D_f=\mathbb{R}$ *e* Im_f *vai depender da função polinomial estudada.*

b) A função constante $f(x)=k$ *(com* $k \in \mathbb{R}^*$*) é um caso particular de função polinomial, com grau zero;*

c) A função afim $f(x)=ax+b$ *é um caso particular de função polinomial, com grau um;*

d) A função quadrática $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ é um caso particular de função polinomial com grau dois;

e) De uma maneira "simplória", podemos afirmar que na função polinomial temos expressões que não possuem variáveis dentro da raiz, nem no denominador, nem mesmo dentro de uma função transcendental.

f) Temos que o gráfico de uma função polinomial é dado por

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, y=\sum_{i=0}^{n}a_i\,x^i\right\}.$$

O esboço do gráfico de funções polinomiais gerais precisam de técnicas que serão estudadas no final do Capítulo 3 (Derivadas).

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.9 *a) A função $f(x)=x^3$ é uma função polinomial de grau 3, chamada de função **Cúbica**;*

b) A função $f(x)=5x^5-6x+7$ é uma função polinomial de grau 5.

c) A função $f(x)=\sqrt{2}x^3-4x^2+\sqrt{6}$ é uma função polinomial de grau 3.

■

Obter as raízes de uma função polinomial de grau elevado não é uma tarefa simples. Por isso, precisamos de muitas ferramentas matemáticas que não fazem parte do nosso curso. Focaremos as nossas buscas em casos viáveis. Outra classe importante de funções é obtida com a divisão de funções polinomiais, chamada de *Funções Racionais*, como definida a seguir.

Definição 1.11.5 *Uma **Função Racional** é qualquer função definida pelo quociente de duas funções polinomiais, ou seja, $f:X\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função racional se ela é da forma*

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios e $q(x)\neq 0,\ \forall\, x\in X$.

■

Vejamos algumas propriedade sobre funções racionais na Observação 1.11.5.

Observação 1.11.5 *Seja*
$$\begin{array}{rccc} f: & X\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$
uma função racional. Então, temos que:

a) O domínio de uma função racional f é todo numero real x de forma que $q(x)\neq 0$, ou seja, $D_f=\{x\in\mathbb{R};q(x)\neq 0\}$.

b) Toda função polinomial pode ser vista como sendo uma função racional, onde $q(x)=1$.

c) Temos que o gráfico da função racional é dado por

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in X\times\mathbb{R};\, y=\frac{p(x)}{q(x)}\right\},$$

onde $p(x)$ *e* $q(x)$ *são polinômios e* $q(x)\neq 0$, $\forall\, x\in X$. *De um modo geral, não conhecemos o esboço da curva que representa o* Gr_f *de uma função racional e, por isso, as técnicas para construção do esboço de gráficos de funções são de grande importância. O esboço do gráfico de funções racionais serão estudadas no final do Capítulo 3 (Derivadas).*

■

Agora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.10 *Seja* $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$. *Então, temos que* f *define uma função racional. Além disso, temos que* f *está definida para todo* $x\in\mathbb{R}$ *tais que* $x\neq -1$. *Logo, temos que*

$$y=\frac{x-1}{x+1}\ e\ x\neq -1\Rightarrow y(x+1)=x-1\Rightarrow xy-y=x-1\Rightarrow xy-x=-1-y\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(1-y)=-1(1+y).$$

Então, considerando $y\neq 1$ *e dividindo os dois lados por* $1-y$ *obtemos*

$$x=\frac{-1(1+y)}{1-y}=\frac{1+y}{y-1}.$$

Portanto, Temos que f *e sua inversa ficam das por*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ & x & \mapsto & f(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\dfrac{1+y}{y-1} \end{array}.$$

Um esboço do gráfico de f *é dado pela Figura 1.33.*

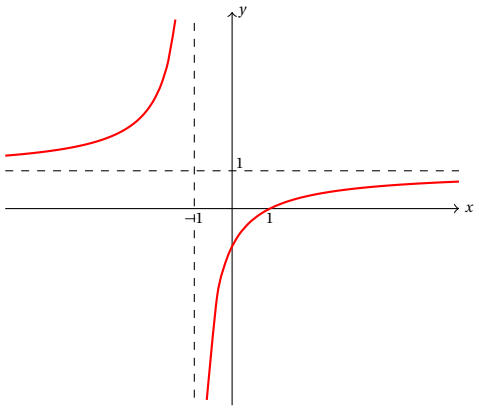

Figura 1.33: Esboço do gráfico da função $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

■

Exemplo 1.11.11 *Seja* $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}$. *Então, temos que* f *define uma função racional. Além disso, temos que* f *está definida para todo* $x\in\mathbb{R}$ *tais que* $x\neq -1$. *Assim, temos que*

$$2x^2+5x+3=(x+1)(2x+3)\Rightarrow f(x)=2x+3 \text{ e } x\neq -1.$$

Dessa forma, temos que um esboço do gráfico de f *fica dado pela Figura 1.34.*

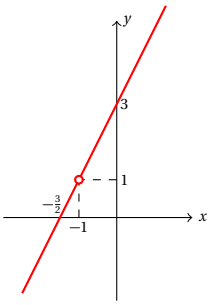

Figura 1.34: Esboço do gráfico da função $f(x)=\dfrac{2x^2+5x+3}{x+1}$.

■

O próximo grupo de funções a ser relembrado é formado pelas *Funções Exponenciais* e as *Funções Logarítmicas* de base a. Vamos a primeira definição.

Definição 1.11.6 *Uma* ***Função Exponencial de Base*** a *é qualquer função que associa a todo número real* x *a um único número real positivo da forma* $f(x)=a^x$, *com* $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. *Em outras palavras, se* $a>0$ *e* $a\neq 1$, *então, uma função exponencial fica dada por*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & f(x)=a^x \end{array}.$$

■

Algumas das principais propriedades das funções exponenciais são apresentadas na Observação 1.11.6.

Observação 1.11.6 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \longmapsto & f(x)=a^x \end{array}\left(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\right)$ *uma função exponencial. Então, temos que:*

a) $D_f=\mathbb{R}$ *e* $CD_f=Im_f=\mathbb{R}_+^*$.

b) A função exponencial é crescente se $a>1$ *e a função exponencial é decrescente se* $0<a<1$.

c) A função exponencial é injetiva (pois ela é crescente) e sobrejetiva (pois $CD_f=Im_f$*). Portanto, ela é uma bijeção.*

d) A curva que representa o esboço do gráfico de f está totalmente acima do eixo das abscissas. Temos que o gráfico da função exponencial é dado por

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = a^x\right\},$$

e, além disso, temos que $(0,1) \in Gr_f$.

e) Um esboço dos tipos de gráficos da função exponencial $f(x) = a^x$ é apresentado nas Figuras 1.35 e 1.36.

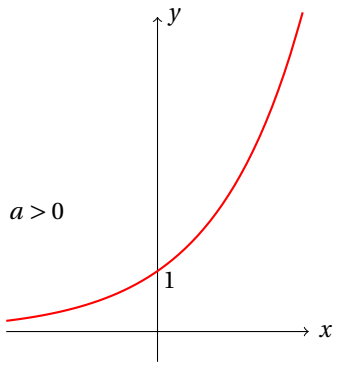

Figura 1.35: Ilustração do Gr_f para a função $f(x) = a^x$, com $a > 1$.

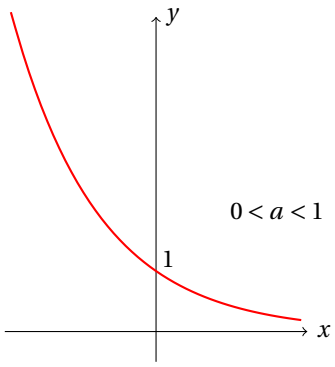

Figura 1.36: Ilustração do Gr_f para a função $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.12 *Seja $f(x) = 2^x$. Então, temos que f é crescente, pois $a = 2 > 1$. Além disso, temos que $D_f = \mathbb{R}$ e que $Im_f = \mathbb{R}_+^*$. Segue que*

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 2^x\right\}.$$

Um esboço do gráfico de f é dado pela Figura 1.37.

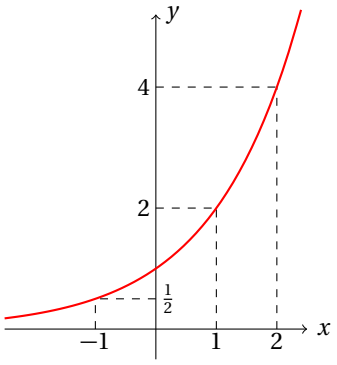

Figura 1.37: Esboço do gráfico da função $f(x) = 2^x$.

■

Exemplo 1.11.13 *Seja* $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. *Então, temos que* f *é decrescente, pois* $0<a=\frac{1}{2}<1$. *Além disso, temos que* $D_f=\mathbb{R}$ *e que* $Im_f=\mathbb{R}_+^*$. *Segue que*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}.$$

Um esboço do gráfico de f *é dado pela Figura 1.38.*

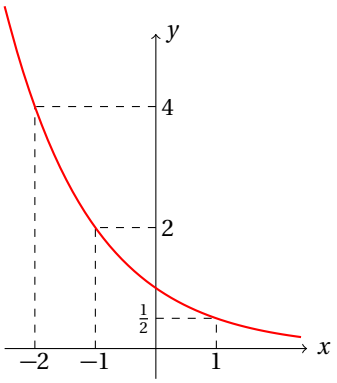

Figura 1.38: Esboço do gráfico da função $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

■

Como ressaltado na Observação 1.11.6, a função exponencial, definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ é uma bijeção e, por isso, podemos definir a sua inversa. Essa função (a inversa da função exponencial) é chamada de *Função Logarítmica* de base a, apresentada a seguir.

Definição 1.11.7 *A* ***Função Logarítmica de Base*** a, *com* $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ *é a inversa da função exponencial, ou seja, é a função que associa a cada número real positivo* y *a um único número real da forma* $f^{-1}(y)=\log_a y$, *com* $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$. *Portanto,*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\log_a y \end{array}.$$

■

Vamos a algumas propriedades envolvendo a função logarítmica, apresentada na Observação 1.11.7.

Observação 1.11.7 *Seja* $\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=log_a y \end{array}\left(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\right)$ *uma função logarítmica. Então, temos que:*

a) $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}_+^*$ *e* $Im_{f^{-1}}=\mathbb{R}$.

b) Podemos relacionar a função exponencial de base a *com o logaritmo de base* a *da seguinte forma:*

$$y=a^x\Leftrightarrow x=\log_a y.$$

c) A curva que representa o gráfico de f^{-1} está totalmente a direita do eixo das ordenadas. Além disso, o ponto de coordenadas $(1,0)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

d) A função logarítmica é crescente se $a>1$ e decrescente se $0<a<1$.

e) Um esboço dos tipos de gráfico da função logarítmica é apresentado pelas Figuras 1.39 e 1.40.

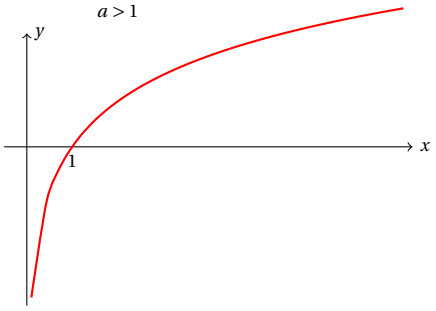

Figura 1.39: Representação do gráfico da função $f(x)=\log_a x$, para $a>1$.

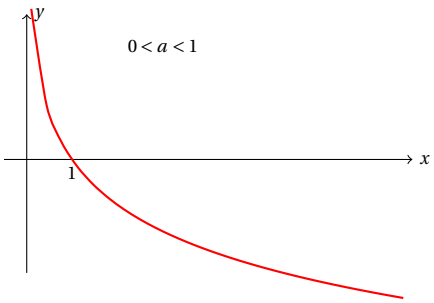

Figura 1.40: Representação do gráfico da função $f(x)=\log_a x$, para $0<a<1$.

f) Como as funções $f(x)=a^x$ e $g(x)=\log_a x$, para $a>0$ e $a\neq 1$ são inversas uma da outra, temos que o esboço dos seus gráficos são simétricos em relação a reta $y=x$. Nas Figuras 1.41 e 1.42 esse fato é exemplificado.

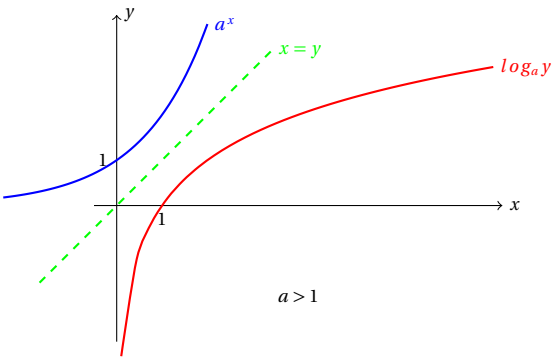

Figura 1.41: Esboço do Gr_f de $f(x)=a^x$ e $f^{-1}(x)=\log_a x$, para $a>1$.

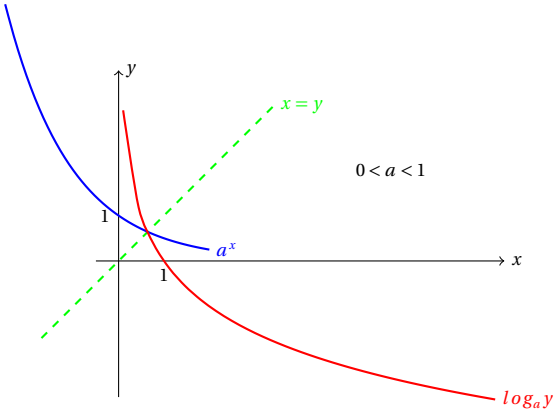

Figura 1.42: Esboço do Gr_f de $f(x)=a^x$ e $g(x)=\log_a x$, para $0<a<1$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.11.14 *Seja $f(x)=\log_2 x$. Então, temos que f é crescente, pois $a=2>1$. Além disso, temos que $D_f=\mathbb{R}_+^*$ e que $Im_f=\mathbb{R}$. O gráfico de f é dado por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R};\, y=\log_2 x\right\}.$$

Um esboço do Gr_f é dado pela Figura 1.43.

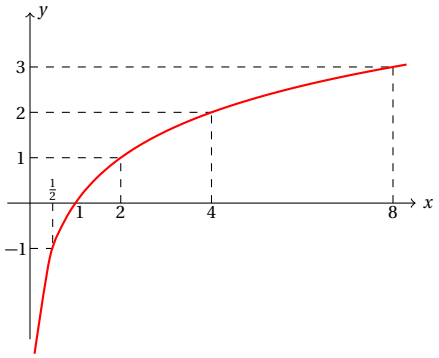

Figura 1.43: Esboço do gráfico da função $f(x)=\log_2 x$.

■

Exemplo 1.11.15 *Seja* $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$. *Então, temos que* f *é decrescente, pois* $a=\dfrac{1}{2}<1$. *Ainda, temos que* $D_f=\mathbb{R}_+^*$ *e que* $Im_f=\mathbb{R}$. *O gráfico de* f *é dado por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}; y=\log_{\frac{1}{2}} x\right\}.$$

Um esboço do Gr_f *é dado pela Figura 1.44.*

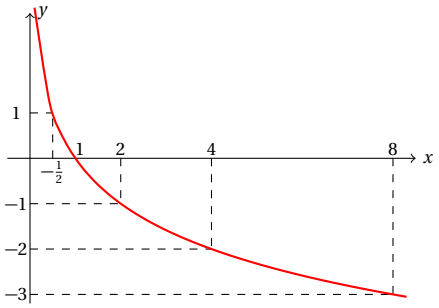

Figura 1.44: Esboço do gráfico da função $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$.

■

Agora vamos apresentar outro grupo de funções igualmente importante aos anteriores para a matemática, o grupo das *Funções Trigonométricas*. Essas funções apresentam as propriedades de paridade e periodicidade que, em muitas situações, ajudam a resolver problemas do mundo moderno. Junto com cada uma das funções trigonométricas a serem estudadas, serão apresentadas condições para que a mesma seja uma bijeção e, consequentemente, será definida uma inversa.

Para isso, vamos utilizar o *Ciclo Trigonométrico*. Sejam Oxy um sistema de eixos cartesiano ortonormal. Então, o sistema formado por Oxy e uma circunferência centrada na origem e raio um (que chamamos de S^1) é chamado de ciclo trigonométrico. Sejam α um ângulo e $A\in S^1$ a origem do ciclo trigonométrico. Considere também o ponto $B\in S^1$ tal que $\overset{\frown}{AB}$ tenha medida α. Observe que as projeções do ponto B sobre os eixos coordenados são as coordenadas cartesianas desse ponto. Assim, considere $C\in Ox$ a projeção do ponto B sobre o eixo das abscissas e considere também $D\in Oy$ a projeção do ponto B sobre o eixo das ordenadas, como visto na Figura 1.45.

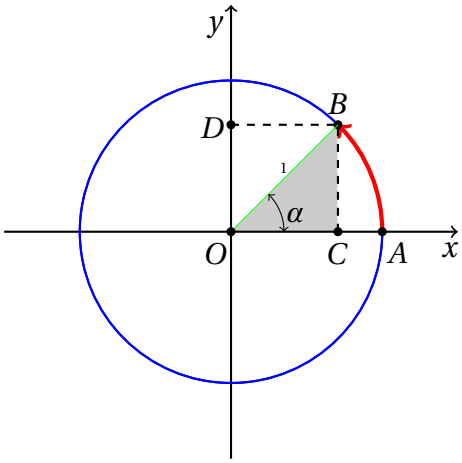

Figura 1.45: Obtendo as funções seno e cosseno no 1^o quadrante do ciclo trigonométrico.

Dessa forma, tomando $B=\big(x(\alpha),y(\alpha)\big)$, segue que $x(\alpha)=\overline{OC}$ e que $y(\alpha)=\overline{OD}$. Considere o triângulo retângulo OCB, retângulo em $\hat{C}$. Assim, nesse triângulo, $\overline{OC}$ é o cateto adjacente ao ângulo α e $\overline{BC}$ é o cateto oposto ao ângulo α. Como $\cos(\alpha)=\dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$, como visto na seção anterior, segue que

$$\cos(\alpha)=\frac{\overline{OC}}{1}\Rightarrow x(\alpha)=\overline{OC}=\cos(\alpha).$$

Portanto, no ciclo trigonométrico, a projeção do extremo do arco α sobre o eixo das abscissas tem o mesmo valor que o cosseno do ângulo α. Com a mesma ideia e o mesmo triângulo OCB, temos que $\overline{OC}$ é o cateto oposto ao ângulo α. Além disso, temos que $\overline{OD}=\overline{BC}$. Assim, como $\text{sen}(\alpha)=\dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$, como visto na seção anterior, segue que

$$\text{sen}(\alpha)=\frac{\overline{BC}}{1}\Rightarrow y(\alpha)=\overline{OD}=\overline{BC}=\text{sen}(\alpha).$$

Dessa forma, no ciclo trigonométrico, a projeção do extremo do arco α sobre o eixo das ordenadas tem o mesmo valor que o seno do ângulo α. Logo, no ciclo trigonométrico, se $B\in S^1$ é o extremo do ângulo α, então, temos que

$$B=\big(x(\alpha),y(\alpha)\big)=(\cos(\alpha),\text{sen}(\alpha)).$$

Um ideia semelhante pode ser usada para obter a projeção em qualquer outro quadrante e a conclusão será a mesma. Assim, podemos seguir para a definição da *Função Seno*.

Definição 1.11.8 *A função trigonométrica* ***Seno*** *é qualquer função que associa a todo número real x a um único número real da forma $f(x)=\text{sen}(x)$, ou seja,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\text{sen}(x) \end{array}.$$

■

As principais características da função seno são apresentadas na Observação 1.11.8.

Observação 1.11.8 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\operatorname{sen}(x) \end{array}$ *a função seno. Então, temos que:*

a) Temos que $D_f=\mathbb{R}$*, visto que podemos encontrar o valor de* $\operatorname{sen}(x)$*,* $\forall\, x\in\mathbb{R}$*.*

b) Como $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$*, para todo* $x\in\mathbb{R}$ *(Relação Fundamental), segue que* $Im_f=[-1,1]$*.*

c) A função seno é uma função periódica de período 2π*.*

d) A função seno é crescente no 1^o *e no* 4^o *quadrante e decrescente no* 2^o *e no* 3^o *quadrante.*

e) A função seno é uma função ímpar, visto que $f(-x)=\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)=-f(x)$*,* $\forall\, x\in\mathbb{R}$*.*

f) A função seno assume valores positivos no 1^o *e* 2^o *quadrante e valores negativos no* 3^o *e* 4^o *quadrante.*

g) A curva que representa o gráfico da função seno é chamada de ***Senoide*** *e ela é dada por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\, y=\operatorname{sen}(x)\right\}.$$

Um esboço do gráfico da função $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ *é dado pela Figura 1.46.*

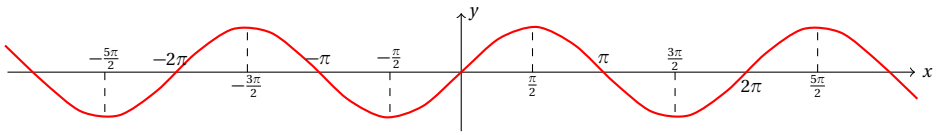

Figura 1.46: Esboço do gráfico da função $f(x)=\operatorname{sen}(x)$.

h) A função seno, da forma que foi definida, não é uma bijeção. Contudo, é possível determinar um intervalo onde ela seja. Observando o gráfico da função seno na Figura 1.46, podemos concluir que a função seno será injetiva se considerarmos um intervalo onde ela saia do seu valor mínimo (ou máximo) e percorra até o primeiro ponto onde a função seno assume o valor máximo (ou mínimo). Para ser sobrejetiva, basta tomarmos $CD_f=[-1,1]$*.*

Assim, considerando a função seno

$$\begin{array}{rccc} f: & \left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x)=\operatorname{sen}(x) \end{array},$$

temos uma bijeção e, por isso, ela é invertível. Definimos a inversa da função seno, que é chamada de ***Função Arco Seno*** *por*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & \left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\operatorname{arcsen}(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que

$$x = \text{arcsen}(y) \Leftrightarrow \text{sen}(x) = y.$$

j) Um esboço do gráfico da função arco seno, que é dado por

$$Gr_{arcsen} = \{(y,x) \in [-1,1] \times \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; x = \arccos(y)\},$$

é dada pela Figura 1.47.

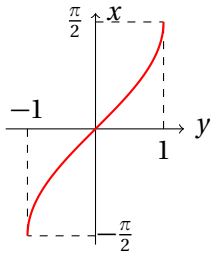

Figura 1.47: Esboço do gráfico da função $f(x) = \text{arcsen}(x)$.

■

De uma maneira análoga, podemos definir a função *Cosseno*, que tem propriedades muito semelhantes as apresentadas pela função seno, visto que

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

e, portanto, a função cosseno é a função seno deslocada em $\frac{\pi}{2}$ unidades. Vamos à definição.

Definição 1.11.9 *A função trigonométrica* ***Cosseno*** *é qualquer função que associa a todo número real x a um único número real da forma $f(x) = \cos(x)$, ou seja,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos(x) \end{array}.$$

■

As principais características da função cosseno são apresentadas na Observação 1.11.9.

Observação 1.11.9 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos(x) \end{array}$ *a função cosseno. Então, temos que:*

a) Temos que $D_f = \mathbb{R}$, visto que podemos encontrar o valor de $\cos(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Novamente, como $\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) = 1$, *segue que $Im_f = [-1,1]$.*

c) A função cosseno é uma função periódica de período 2π.

d) A função cosseno é crescente no 3^o e no 4^o quadrante e decrescente no 1^o e no 2^o quadrante.

e) A função cosseno é uma função par, visto que $f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

f) A função cosseno assume valores positivos no 1^o e no 4^o quadrante e valores negativos no 2^o e no 3^o quadrante.

*g) A curva que representa o gráfico da função cosseno também é chamada de **Senoide** e ela é dada por*

$$Gr_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \cos(x)\right\}.$$

Um esboço do gráfico da função $f(x) = \cos(x)$ é dado pela Figura 1.48.

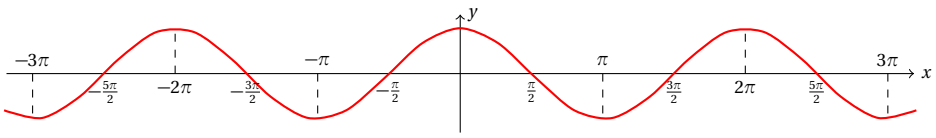

Figura 1.48: Esboço do gráfico da função $f(x) = \cos(x)$.

h) Da forma que a função cosseno foi definida (da mesma forma que a função seno), ela não é uma bijeção. Contudo, se a redefinirmos por

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & f(x) = \cos(x) \end{array},$$

*temos que a função cosseno é uma bijeção. Dessa forma, podemos definir a sua inversa, chamada de **Função Arco Cosseno**. A inversa da função cosseno é denotada por*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arccos(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que $x = \arccos(y) \Leftrightarrow \cos(x) = y$.

j) Um esboço do gráfico da função $f^{-1}(y) = \arccos(y)$, que é dado por

$$Gr_{arcos} = \{(y, x) \in [-1,1] \times [0,\pi]; x = \arccos(y)\},$$

é apresentado na Figura 1.49.

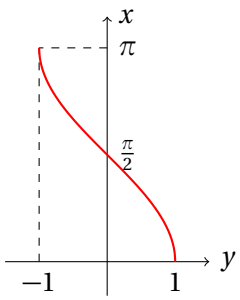

Figura 1.49: Esboço do gráfico da função $f(x) = \arccos(x)$.

■

Conhecendo o valor do seno e do cosseno de qualquer número real, podemos obter o valor da tangente de quase todos os números reais também. Contudo, como a tangente é obtida pelo quociente do seno pelo cosseno, só é possível definir a tangente quando o cosseno for um número diferente de zero. Em outras palavras, só existe a tangente de x, se esse número não for da forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. Voltemos ao ciclo trigonométrico.

Seja a reta r a reta paralela ao eixo das ordenadas passando pela origem do ciclo trigonométrico $A=(1.0,0.0)$, como visto na Figura 1.50.

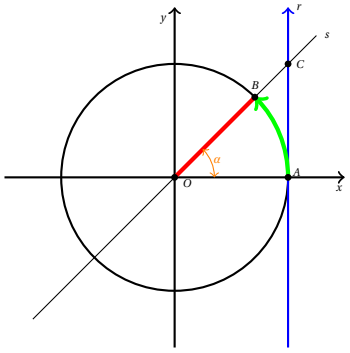

Figura 1.50: Representação do eixo das tangentes no ciclo trigonométrico.

Seja α um ângulo. Sobre a S^1, encontre o ponto B tal que $\overset{\frown}{AB}=\alpha$. Trace a reta s passando por O e por B, encontrando o ponto $C\in r\cap s$. Como $r\parallel Oy$, segue que OAC é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OC}$, $C\hat{O}A=\alpha$ e cateto $\overline{OA}=r=1$. Dessa forma, temos que

$$\tan(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{AC}}{1}=\overline{AC}.$$

Portanto,

$$\overline{AC}=\tan(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Vamos a definição da função tangente.

Definição 1.11.10 *Seja* $A=\left\{x\in\mathbb{R}; x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. *A função trigonométrica* ***Tangente*** *é qualquer função que associa a todo número real* $x\in A$ *a um único número real* $y=\tan(x)$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\tan(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \end{array}.$$

■

É muito importante observar e identificar o domínio da função tangente, pois diferente das funções seno e cosseno o domínio da função tangente não é o conjunto dos números reais. A seguir, na Observação 1.11.10, são apresentadas algumas das principais propriedades da função tangente.

Observação 1.11.10 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\tan(x) \end{array}$ *a função tangente. Então, temos que:*

a) $D_f = A = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *isto é, a função tangente está definida apenas para valores onde o cosseno é diferente de zero.*

b) $Im_f = \mathbb{R} = CD_f$, *em outras palavras, a função tangente é sobrejetiva.*

c) A função tangente é uma função periódica de período π.

d) A função tangente é crescente em todos os quadrantes. Assim, sempre que comparamos dois ângulos do mesmo quadrante, e da mesma determinação, quanto maior o valor do ângulo, maior será o valor da tangente.

e) A função tangente é uma função ímpar, visto que ela é obtida pelo quociente de uma função ímpar por uma função par.

f) Conhecendo o sinal da função seno e da função cosseno, conhecemos o sinal da função tangente e, por isso, segue que a função tangente é positiva no 1^o *e no* 3^o *quadrante e negativa no* 2^o *e no* 4^o *quadrante.*

g) A curva que representa o gráfico da função tangente é chamada de ***Tangentoide*** *e ela é dada por*

$$Gr_f = \left\{(x,y) \in A \times \mathbb{R}; y = \tan(x)\right\},$$

com $A = \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. *Um esboço do gráfico de* $f(x) = \tan(x)$ *é dado pela Figura 1.51.*

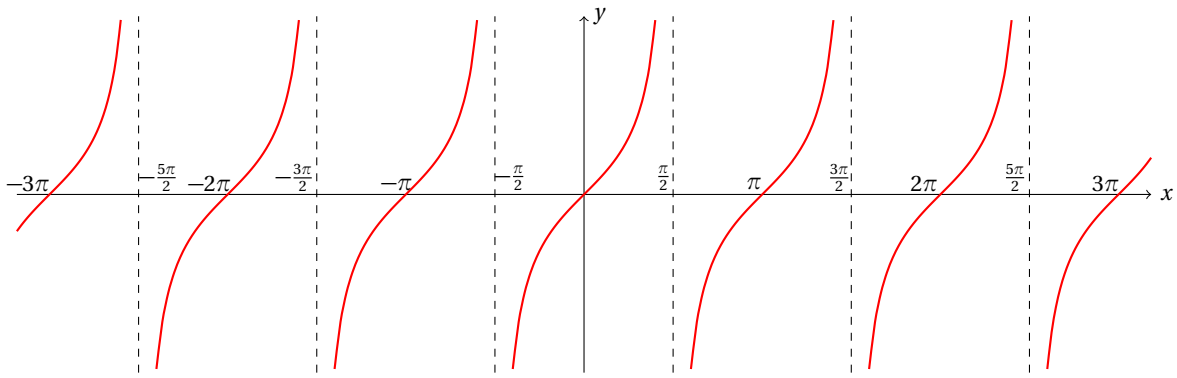

Figura 1.51: Esboço do gráfico da função $f(x) = \tan(x)$.

h) Como já comentado, a função tangente é sobrejetiva. Logo, se for considerado um intervalo da forma $I = \left]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ *fixo, segue que a função tangente passa a ser também injetiva, visto que ela é estritamente crescente. Consequentemente, ela é uma bijeção. Portanto, existe a sua inversa, chamada de* ***Função Arco Tangente****, que é denotada por*

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) = \arctan(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que $x = \arctan(y) \Leftrightarrow \tan(x) = y$.

j) Um esboço do gráfico da função arco tangente é apresentado na Figura 1.52.

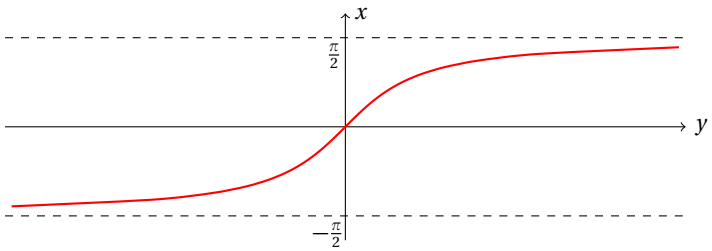

Figura 1.52: Esboço do gráfico da função $f^{-1}(y) = \arctan(y)$.

■

Da mesma maneira que a função seno e a função cosseno se relacionam, a função tangente e a função *Cotangente* apresentam semelhanças no seu comportamento. Lembremos que a cotangente é obtida pela divisão do cosseno pelo seno e, por isso, só faz sentido falar de cotangente quando o seno for diferente de zero. Novamente, voltemos ao ciclo trigonométrico.

Seja r a reta paralela ao eixo das abscissas passando pelo ponto $D = (0,1) \in S^1$ do ciclo trigonométrico tal que $\overset{\frown}{AD} = 90^0$, como visto na Figura 1.53.

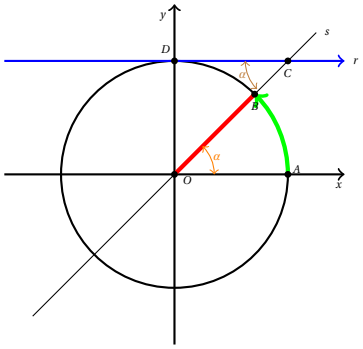

Figura 1.53: Representação do eixo das cotangentes no ciclo trigonométrico.

Seja α um ângulo. Sobre a S^1, encontre o ponto B tal que $\overset{\frown}{AB} = \alpha$. Trace a reta s passando por O e por B, encontrando o ponto $C \in r \cap s$. Como $r \parallel Ox$, segue que ODC é um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OC}$, $D\hat{C}O = C\hat{O}A = \alpha$ (alternos internos) e cateto $\overline{OD} = r = 1$, segue que

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{1} \Rightarrow \overline{DC} = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \cot(\alpha).$$

Portanto,

$$\overline{DC} = \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}.$$

Vamos a definição da função cotangente.

Definição 1.11.11 *Considere* $A=\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. *A função trigonométrica* ***Cotangente*** *é qualquer função que associa a todo número real* $x\in A$ *a um único número real* $y=\cot(x)$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\cot(x)=\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \end{array}.$$

■

Algumas das principais características da função cotangente são apresentada na Observação 1.11.11

Observação 1.11.11 *Seja* $\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)=\cot(x) \end{array}$ *a função cotangente. Então, temos que:*

a) $D_f=A=\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$, *isto é, a função cotangente está definida apenas para valores onde o seno é diferente de zero.*

b) $Im_f=\mathbb{R}=CD_f$, *em outras palavras, a função cotangente é sobrejetiva.*

c) A função cotangente também é uma função periódica de período π.

d) A função cotangente é decrescente em todos os quadrantes. Assim, sempre que compararmos dois ângulos do mesmo quadrante, e na mesma determinação, quanto maior o valor do ângulo, menor será o valor da sua cotangente.

e) A função cotangente também é uma função ímpar, visto que ela é obtida pelo quociente de uma função par por uma função ímpar.

f) Como conhecemos o sinal da função cosseno e da função seno, temos que a função cotangente é positiva no 1^o *e* 3^o *quadrante e negativa no* 2^o *e* 4^o *quadrante.*

g) A curva que representa o gráfico da função cotangente também é chamada de ***Tangentoide*** *e ela é dada por*

$$Gr_f=\left\{(x,y)\in A\times\mathbb{R}; y=\cot(x)\right\},$$

onde $A=\{x\in\mathbb{R}; x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. *Um esboço do gráfico de* $f(x)=\cot(x)$ *é dado pela Figura 1.54.*

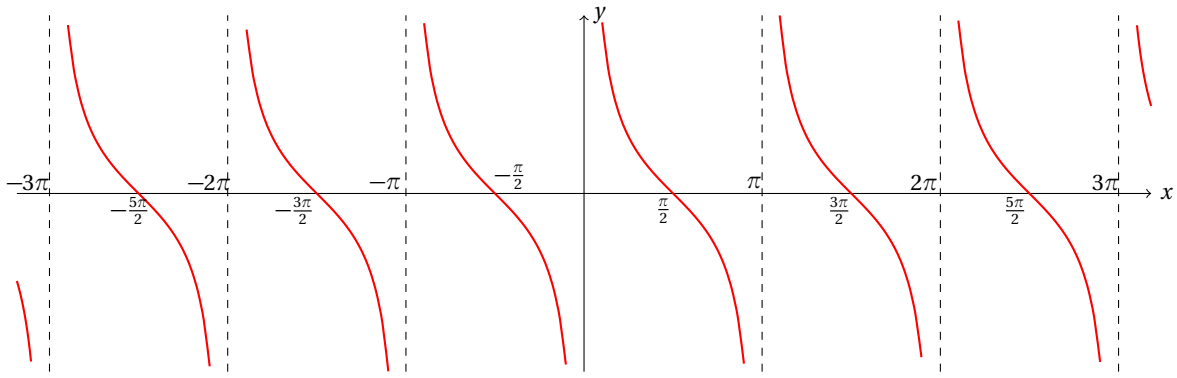

Figura 1.54: Esboço do gráfico da função $f(x)=\cot(x)$.

h) Como já comentado, a função cotangente é sobrejetiva. Logo, se for considerado um intervalo da forma $I =](k-1)\pi, k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ fixo, então, temos que a função cotangente passa a ser também injetiva e, consequentemente, uma bijeção e, por isso, existe a sua inversa, que é chamada de ***Função Arco Cotangente*** *e é denotada por*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,\pi[\\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \operatorname{arccot}(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que $x = \operatorname{arccot}(y) \Leftrightarrow \cot(x) = y$.

j) Um esboço do gráfico da função arco cotangente é apresentado na Figura 1.55.

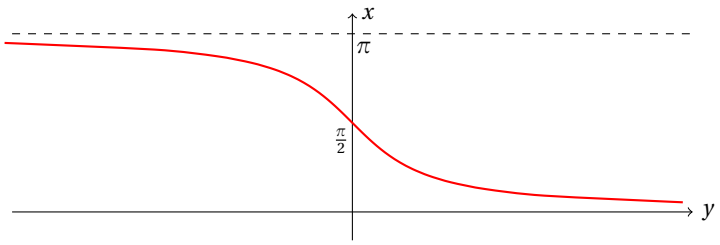

Figura 1.55: Esboço do gráfico da função $f^{-1}(y) = \operatorname{arccot}(y)$.

■

Agora vamos apresentar as últimas duas funções trigonométricas, a função *Secante* e a função *Cossecante*. Como a secante é o inverso multiplicativo do cosseno, seque que só faz sentido falar de secante se o cosseno for diferente de zero. Vejamos a representação dessas funções no ciclo trigonométrico.

Considere $B \in S^1$ o extremo do arco de comprimento α e seja r a reta tangente a B, como visto na Figura 1.56.

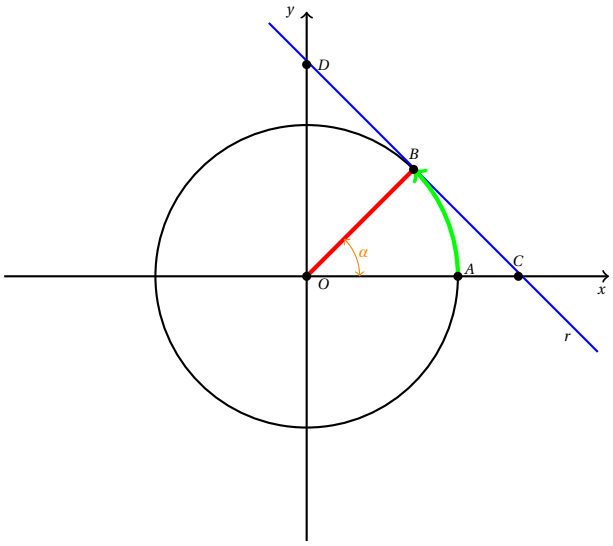

Figura 1.56: Representação do eixo das secante e cossecante no ciclo trigonométrico.

Como r é tangente a S^1, segue que o ângulo $O\hat{B}C$ é um ângulo reto e, por isso, o triângulo OBC é triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OC}$. Consequentemente,

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{1}{\overline{OC}} \Rightarrow = \overline{OC} = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \sec(\alpha).$$

Portanto,

$$\overline{OC} = \sec(\alpha).$$

Vamos a definição da função secante.

Definição 1.11.12 *Considere* $A = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. *A função trigonométrica* ***Secante*** *é qualquer função que associa a todo número real* $x \in A$ *a um único número real* $y = \sec(x)$*, ou seja,*

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \end{array}.$$

■

Vejamos algumas propriedades da função secante, apresentadas na Observação 1.11.12.

Observação 1.11.12 *Seja* $\begin{array}{rccl} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \sec(x) \end{array}$ *a função secante. Então, temos que:*

a) $D_f = A = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$*, isto é, a função secante está definida apenas para valores onde o cosseno é diferente de zero.*

b) $Im_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

c) A função secante é uma função periódica de período 2π.

d) A função secante é crescente, no 1^o *e no* 2^o *quadrante e é decrescente no* 3^o *e no* 4^o *quadrante.*

e) A função secante é uma função par.

f) A função secante tem o mesmo sinal da função cosseno, ou seja, ela é positiva no 1^o *e no* 4^o *quadrante e é negativa no* 2^o *e no* 3^o *quadrante.*

g) A curva que representa o gráfico da função secante é chamada de ***Secantoide*** *e é dada por*

$$Gr_f = \left\{ (x, y) \in A \times \mathbb{R}; y = \sec(x) \right\},$$

onde $A = \left\{ x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. *Um esboço do gráfico de* $f(x) = \sec(x)$ *é dado pela Figura 1.57.*

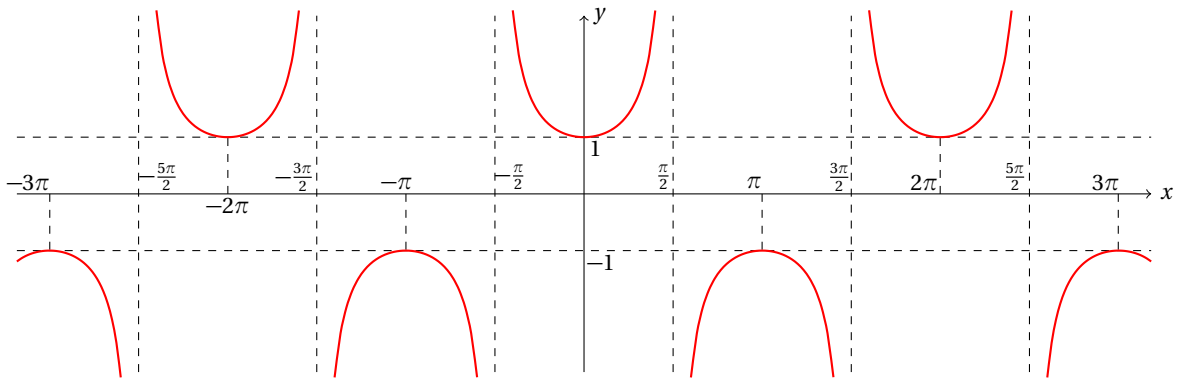

Figura 1.57: Esboço do gráfico da função $f(x)=\sec(x)$.

h) Assim como no caso das funções anteriores, é possível definir um intervalo onde a função secante seja uma bijeção. Para isso, considere

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} & \to & (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=\sec(x) \end{array}.$$

Com isso, temos que ela é invertível e sua inversa é chamada de ***Função Arco Secante****, sendo denotada por:*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) & \to & [0,\pi]\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\operatorname{arcsec}(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que $x=\operatorname{arcsec}(y)\Leftrightarrow\sec(x)=y$.

j) Um esboço do gráfico da função arco secante é apresentada na Figura 1.58.

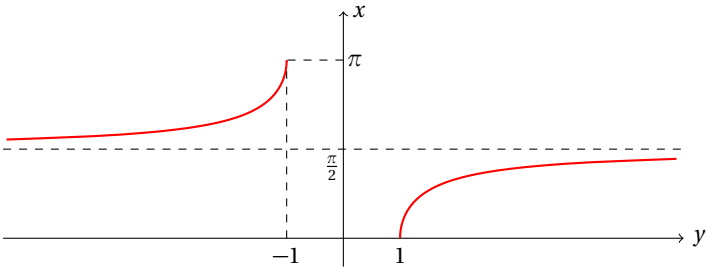

Figura 1.58: Esboço do gráfico da função $f^{-1}(y)=\operatorname{arcsec}(y)$.

■

Para finalizar as funções trigonométricas, falaremos da função *Cossecante*. Temos que a cossecante é o inverso multiplicativo do seno e, por isso, só faz sentido falar da função cossecante se o seno for diferente de zero. Considere o ponto D na Figura 1.56. Como r é tangente a S^1, segue que o ângulo $O\hat{B}D$ é um ângulo reto e, por isso, o triângulo OBD é triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{OD}$. Consequentemente, como $O\hat{D}B=\alpha$, segue que

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\frac{1}{\overline{OD}}\Rightarrow=\overline{OD}=\frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}=\csc(\alpha).$$

Portanto,

$$\overline{OD} = \csc(\alpha).$$

Vamos a definição da função cossecante.

Definição 1.11.13 *Considere* $A = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. *A função trigonométrica* ***Cossecante*** *é qualquer função que associa a todo número real* $x \in A$ *a um único número real* $y = \csc(x)$, *ou seja,*

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} \end{array}.$$

■

Vejamos as principais propriedades envolvendo a função cossecante, apresentada na Observação 1.11.13.

Observação 1.11.13 *Seja* $\begin{array}{rccc} f: & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \csc(x) \end{array}$ *a função cossecante. Então, temos que:*

a) $D_f = A = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, *isto é, a função cossecante está definida apenas para valores onde o seno é diferente de zero.*

b) $Im_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

c) A função cossecante é uma função periódica de período 2π.

d) A função cossecante é uma função ímpar.

e) A função cossecante é crescente no 2^o *e* 3^o *quadrante e decrescente no* 1^o *e* 4^o *quadrante.*

f) O sinal da função cossecante é o mesmo da função seno, ou seja, ela é positiva no 1^o *e* 2^o *quadrante e é negativa no* 3^o *e* 4^o *quadrante.*

g) A curva que representa o gráfico da função cossecante também é chamada de Secantoide e é dada por

$$Gr_f = \left\{(x, y) \in A \times \mathbb{R}; y = \csc(x)\right\},$$

sendo $A = \{x \in \mathbb{R}; x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. *Um esboço do gráfico de* $f(x) = \csc(x)$ *é dado pela Figura 1.59.*

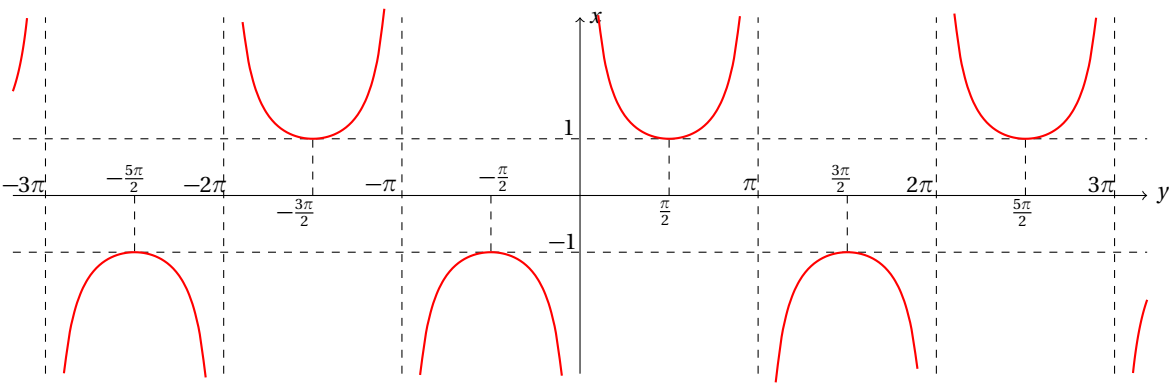

Figura 1.59: Esboço do gráfico da função $f(x) = \csc(x)$.

h) A função cossecante torna-se uma bijeção quando escolhido um intervalo apropriado. Assim,

$$\begin{array}{rccl} f: & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\} & \to & (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ & x & \mapsto & f(x)=\csc(x) \end{array}$$

é invertível e a sua inversa, que é chamada de ***Função Arco Cossecante*** *é dada por:*

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) & \to & \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\} \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y)=\operatorname{arccsc}(y) \end{array}.$$

i) Simbolicamente, temos que $x=\operatorname{arccsc}(y)\Leftrightarrow\csc(x)=y$.

j) Um esboço do gráfico da função arco cossecante é apresentada pela Figura 1.60.

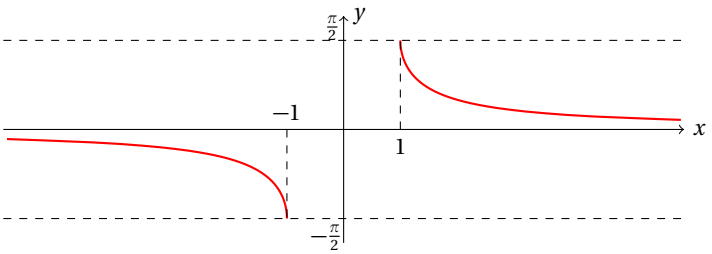

Figura 1.60: Esboço do gráfico da função $f(x)=\operatorname{arccsc}(x)$.

Terminada essa revisão sobre funções, podemos fazer alguns exercícios para fixar e aprimorar o nosso conhecimento e, com isso, iniciar o nosso estudo de *Limite de Funções*. Bons estudos.

1.12 Exercícios

Exercício 1.12.1 *Encontre o conjunto domínio, o conjunto imagem, determine a função inversa com os seus respectivos conjuntos domínio e imagem, e faça o esboço do gráfico de cada uma das funções abaixo.*

a) $y=2x$;

b) $y=-3x+6$;

c) $y=2x+7$;

d) $y=-2x^2$;

e) $y=x^2-5$;

f) $y=-2x^2-4x+6$;

g) $y=x^4$;

h) $y=\dfrac{1}{x}$;

i) $y=\dfrac{x-1}{x+4}$;

j) $y=3^x$;

k) $y=-2^x$;

l) $y=\log_2(-x)$;

m) $y=|\operatorname{sen}(x)|$;

n) $y=\cos(x)+2$;

o) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

p) $y=\sec(-2x)$.

Exercício 1.12.2 *Sabendo que* f *é uma função afim e que* $f(-1)=2$ *e que* $f(2)=-6$, *encontre a função* f.

Exercício 1.12.3 *Sabendo que* f *é uma função afim e que* $f(-1)=2$ *e que* $f(2)=-6$, *encontre a função* f.

Exercício 1.12.4 *Prove que a função $cosh(x)$ é uma função par e que a função $senh(x)$ é ímpar.*

Exercício 1.12.5 *Descida se existe uma função quadrática de forma que $f(-1)=5$, $f(1)=-1$ e $f(3)=5$.*

Exercício 1.12.6 *Sabendo que f é uma função quadrática e que $f(-1)=2=f(5)$ e que $f(2)=-6$, encontre a função f.*

Exercício 1.12.7 *Em cada um dos itens a seguir fale qual o conjunto domínio, conjunto imagem, o gráfico da função e faça um esboço do gráfico da mesma.*

a) $f(x)=4^x-3$;

b) $f(x)=4^{x-3}$;

c) $f(x)=-2^{-x}$;

d) $f(x)=\log_{0,25} x$;

e) $f(x)=\log_{10}(x+5)$;

f) $f(x)=-\log_2 x-5$.

Exercício 1.12.8 *Mostre que* $\cos(\text{arcsen}(x))=\sqrt{1-x^2}$.

Exercício 1.12.9 *Resolva cada uma das equações a seguir.*

a) $\text{sen}(t)=1$;

b) $\cos(t)=1$;

c) $\tan(t)=1$;

d) $\sec(t)=-1$;

e) $\text{sen}(t)=0$;

f) $\cot(t)=0$;

g) $\csc(t)=0$;

h) $\tan(t)=\sqrt{3}$;

i) $\cos(t)=-\frac{1}{2}$;

Exercício 1.12.10 *Encontre o conjunto $D_{f\circ g}$ sabendo que $f(x)=\tan(x)$ e $g(x)=\frac{x}{2}$.*

Exercício 1.12.11 *Qual o conjunto D_f, sendo $f(x)=x^3-5x^2-6x-30$? Quais os pontos onde $f(x)>0$?*

Exercício 1.12.12 *Qual o conjunto D_f, sendo $f(x)=\frac{x^3+3x^2+x+3}{x+3}$? Quais os pontos onde $f(x)>0$?*

Exercício 1.12.13 *Qual o conjunto D_f, sendo $f(x)=\frac{x^4+x^3-9x^2-3x+18}{x^2+x-6}$? Quais os pontos onde $f(x)>0$?*