

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT- Eng. Elétrica - Integral

Prova	3ª Avaliação de Álgebra Linear - 22/07/2025
Prof.	Carlos Alberto da Silva Junior
Valor	30.0 pontos
Aluno(a):	GABARITO

- Escolha 5 (cinco) das 6 (seis) questões abaixo, assinalando a opção escolhida para **NÃO** ser corrigida no parênteses.
- Só serão corrigidas 5 (cinco) questões, e se não for indicada qual a opção a **Não** ser considerada, serão corrigidas as 5 primeiras questões.
- A prova pode ser feita a caneta ou a lápis; - Horário de prova: das 08:00 as 09:50.
- Não é permitido o uso de nenhum equipamento eletrônico durante a prova, sendo que o uso de qualquer equipamento pode ser considerado cola e a prova será anulada.

1ª) **Questão () (Valor 6.0 Pontos):** Use o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno canônico e a base $B = \{(2, 1, -1), (3, 5, 6), (2, 1, 4)\}$ e encontre uma base ortonormal de V a partir de B .

Solução: Usando o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, temos que $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ é um conjunto ortogonal de B se:

- $w_1 = v_1$, ou seja, $w_1 = (2, 1, -1)$,

•

$$\begin{aligned} w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (3, 5, 6) - \frac{\langle (3, 5, 6), (2, 1, -1) \rangle}{\|(2, 1, -1)\|^2} (2, 1, -1) = \\ &= (3, 5, 6) - \frac{5}{6} (2, 1, -1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6} \right) \text{ e} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \\ &= (2, 1, 4) - \frac{\left\langle (2, 1, 4), \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6} \right) \right\rangle}{\left\| \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6} \right) \right\|^2} \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6} \right) - \frac{\langle (2, 1, 4), (2, 1, -1) \rangle}{\|(2, 1, -1)\|^2} (2, 1, -1) = \\ &= (2, 1, 4) - \frac{41}{79} \left(\frac{4}{3}, \frac{25}{6}, \frac{41}{6} \right) - \frac{1}{6} (2, 1, -1) = \left(\frac{77}{79}, -\frac{105}{79}, \frac{49}{79} \right). \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto

$$C_O = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_3}{\|w_3\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(\frac{8}{395}, \frac{25}{395}, \frac{41}{395} \right), \left(\frac{77}{245}, -\frac{105}{245}, \frac{49}{245} \right) \right\}$$

é a base ortonormal procurada.

2ª) **Questão () (Valor 6.0 Pontos):** Sendo $V = \mathbb{R}^3$ o espaço vetorial com o produto interno canônico, para cada par de vetores $u, v \in V$ dados a seguir obtenha: $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$, $d(u, v)$ e $\angle(u, v)$.

a) $u = (1, 0, 5)$ e $v = (-2, 3, 0)$;

b) $u = (2, 0, -2)$ e $v = (3, 0, 3)$;

c) $u = (3, -2, -1)$ e $v = (1, 2, 3)$;

Solução:

a) Temos que

- $\langle u, v \rangle = -2 + 0 + 0 = -2$;
- $\|u\| = \sqrt{1 + 0 + 25} = \sqrt{26}$;
- $\|v\| = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13}$;
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-3, -3, -5)\| = \sqrt{9 + 9 + 25} = \sqrt{43}$;
- $\angle(u, v) = \theta$, onde $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{-2}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{2}}{13} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{13}\right)$.

b) Temos que

- $\langle u, v \rangle = 6 + 0 - 6 = 0$;
- $\|u\| = \sqrt{4 + 0 + 4} = 2\sqrt{2}$;
- $\|v\| = \sqrt{9 + 0 + 9} = 3\sqrt{2}$;
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|(-1, 0, -5)\| = \sqrt{1 + 0 + 25} = \sqrt{26}$;
- $\angle(u, v) = \theta$, onde $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$.

c) Temos que

- $\langle u, v \rangle = 3 - 4 - 3 = -4$;
- $\|u\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$;
- $\|v\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$;
- $d(u, v) = \|u - v\| = \|(2, -4, -4)\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$;
- $\angle(u, v) = \theta$, onde $\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{2}{7} \Rightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{2}{7}\right)$.

3ª) **Questão () (Valor 6.0 Pontos):** Encontre os autovalores, autovetores e os autoespaços associados a matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. Além disso, verifique se A é um operador diagonalizável e, em caso afirmativo, escreva a base C tal que A é uma matriz diagonal (Considere o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Solução: Temos que o polinômio característico da matriz A fica dado por:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & -2 \\ 4 & -1 - \lambda & -2 \\ 10 & -5 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)(-1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 40 + 60 + 20(-1 - \lambda) + 12(-3 - \lambda) - 10(6 - \lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + \lambda = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 1).$$

Considerando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, temos que A não é diagonalizável, visto que $-\lambda^2 - 1$ não possui raízes reais.

Temos que o autoespaço E_2 é dado por

$$\text{Nuc}(2Id - A) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & x \\ 4 & -3 & -2 & y \\ 10 & -5 & -5 & z \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & -2 & x \\ 10 & -5 & -5 & z \\ 0 & 0 & 0 & y - x \end{array} \right) \Rightarrow y - x = 0 \text{ e } z = 0.$$

Portanto, um autovalor de $\lambda = 2$ é da forma $v = (x, x, 0)$, com $x \neq 0$ e $E_2 = [(1, 1, 0)]$.

4ª) **Questão () (Valor 6.0 Pontos):** Considere a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y, -x - 2y + 2z) .$$

Encontre $Im(T)$ e $N(T)$.

Solução: Temos que $(x, y, z) \in Nuc(T)$ se $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ -1 & -2 & 2 & z \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 3 & -4 & y - 2x \\ 0 & -3 & 4 & x + z \end{array} \right] \sim \\ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 3 & -4 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & -x + y + z \end{array} \right] .$$

Portanto,

$$Nuc(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x - y\} = [(1, 0, 1), (1, 0, -1)].$$

Segue do Teorema do Núcleo e da Imagem que $Im(T)$ tem dimensão 1 e, conseqüentemente, podemos considerar $Im(T) = [(0, 1, 0)]$, visto que $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^3$.

5ª) **Questão() (Valor 6.0 Pontos):** Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que o seu núcleo é gerado por cada um dos conjuntos S a seguir.

a) $S = \{(1, 0, -1)\}$;

b) $S = \{(1, 0, -1), (0, 2, -1)\}$;

Solução:

a) Considere $B = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ com $T(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Assim, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \Rightarrow (x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 0) + (z + x)(0, 0, 1).$$

Assim, a transformação T fica dada por

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, -1) + yT(0, 1, 0) + (z + x)T(0, 0, 1) = (0, y, z + x).$$

b) Considere $B = \{(1, 0, -1), (0, 2, -1), (0, 0, 1)\}$ base do $\mathbb{R}^3$ com $T(1, 0, -1) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Assim, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 2, -1) + \gamma(0, 0, 1) \Rightarrow (x, y, z) = x(1, 0, -1) + \frac{y}{2}(0, 2, -1) + \left(z + x + \frac{y}{2}\right)(0, 0, 1).$$

Assim, a transformação T fica dada por

$$T(x, y, z) = xT(1, 0, -1) + \frac{y}{2}T(0, 1, 0) + \left(z + x + \frac{y}{2}\right)T(0, 0, 1) = \left(0, 0, z + x + \frac{y}{2}\right).$$

6ª) **Questão () (Valor 6.0 Pontos):** Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o único operador linear sobre $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, -1), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) = (-1, 1, 0).$$

T é diagonalizável? Justifique a sua resposta.

Solução: Observe que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, por isto, T transforma a base canônica do $\mathbb{R}^3$ num conjunto LI . Portanto, T é diagonalizável.

Boa Prova!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!