

4.7 O Teorema de Green

O *Teorema de Green* expressa uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada c , no plano, como sendo uma integral dupla sobre a região limitada pela curva. O teorema é enunciado a seguir.

Teorema 4.7.1 (Teorema de Green:) *Sejam c uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário e R a região fechada delimitada por c . Se $\vec{f} = (f_1, f_2)$ é um campo vetorial contínuo, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D que contém R , então,*

$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint_c [f_1 dx + f_2 dy] = \int \int_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Demonstração: Será omitida nessas notas. ■

Exemplo 4.7.1 *Usando o Teorema de Green, calcule $\oint_c (y^2 dx + 2x^2 dy)$, sendo c o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ e $(0, 2)$, no sentido anti-horário.*

Solução: Seja R a região delimitada pela curva c , que é fechada, orientada no sentido anti-horário e é suave por partes. Temos que $\vec{f} = (f_1, f_2) = (y^2, 2x^2)$ e, por isso, $\vec{f}$ é contínua e tem derivadas contínuas em qualquer domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Então, tomando $0 \leq x \leq 1$, segue que $2x \leq y \leq 2$. Assim, pelo Teorema de Green, temos que

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (4x - 2) dy dx = \int_0^1 [4xy - y^2]_{2x}^2 dx = \\ &= \int_0^1 [4x^2 - 8x^2 - 4 + 8x] dx = \left[\frac{-4x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{-4}{3}. \end{aligned}$$
■

Exemplo 4.7.2 *Calcule $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r}$, ao longo da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, no sentido horário, sendo $\vec{f}(x, y) = (4x^2 - 9y, 9xy + \sqrt{y^2 + 1})$.*

Solução: Seja R a região delimitada pela circunferência dada por $x^2 + (y-1)^2 = 1$. A curva c está orientada no sentido horário e, por isso, temos que podemos calcular a integral de linha no sentido anti-horário, invertendo o sentido do sinal da mesma no final da operação. Além disso, temos que c é uma curva suave, que $\vec{f}$ é contínua e tem derivadas contínuas em qualquer domínio $D \subset \mathbb{R}^2$. Dessa forma, podemos aplicar o Teorema de Green.

Tomando $0 \leq y \leq 2$, segue que $-\sqrt{1 - (y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{1 - (y-1)^2}$. Assim,

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} (9+9y)\sqrt{1-(y-1)^2} dx dy = 18 \int_0^2 (y+1)\sqrt{1-(y-1)^2} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 18 \int_0^2 (y-1) \sqrt{1-(y-1)^2} dy + 36 \int_0^2 \sqrt{1-(y-1)^2} dy = \\
&= \left\{ 12(1 - (1 - (y-1)^2))^{\frac{3}{2}} + 36 \left(\frac{y-1}{2} \sqrt{1-(y-1)^2} + \frac{1}{2} \arcsen \left(\frac{y-1}{1} \right) \right) \right\} \Big|_0^2 = \\
&= 9\pi - (-9\pi) = 18\pi.
\end{aligned}$$

■

Observação 4.7.1 É possível utilizar o Teorema de Green para obter a área de uma região plana, como visto a seguir. Sejam R e c satisfazendo o Teorema de Green. Por integração dupla, tem-se que $A_R = \iint_R dx dy$. Dessa forma, $\vec{f}$ é um campo vetorial que satisfaz $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ e, por isto, temos

$$\begin{cases} f_1 = -y & e & f_2 = 0; \\ f_1 = 0 & e & f_2 = x; \\ f_1 = -\frac{y}{2} & e & f_2 = \frac{x}{2}; \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} A_R = \oint x dy; \\ A_R = \oint -y dx; \\ A_R = \oint \frac{x dy - y dx}{2}. \end{cases}$$

Exemplo 4.7.3 Calcule a área delimitada pela elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Solução: Temos que a elipse fica dada por $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Assim,

$$\begin{aligned}
A_R &= \oint x dy = \int_0^{2\pi} 2\cos(t) \cdot 3\cos(t) dt = 6 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = 6 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= 6\pi \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

■

4.8 Exercícios

Exercício 4.8.1 Calcule as integrais abaixo, usando o Teorema de Green.

- $\oint [(y^2 + 2xy)dx + (2x^2 + 2xy)dy]$, ao longo do triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ e $(-2,2)$, no sentido anti-horário;
- $\oint [x^2 dx + (4x + y)dy]$, ao longo do triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(2,2)$, no sentido horário;

- c) $\oint [(\ln(x) - 2y)dx + (2x + e^y)dy]$, ao longo da elipse $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$;
- d) $\oint [(3x^2 - 4xy + y)dx + (9xy + y^2 + x)dy]$, ao longo da circunferência $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, no sentido anti-horário;
- e) $\oint [(y^2 + \sqrt{4 - x^2})dx + (\ln(y) - 4x)dy]$, ao longo do retângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ e $(0, 2)$;
- f) $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{f} = (x^2 + 4xy, 2x^2 + 2x + y^2)$, e C é a elipse $x^2 + 4y^2 = 16$;

Exercício 4.8.2 Calcule a área da elipse $x = 6\cos(t)$ e $y = 2\sin(t)$, utilizando o Teorema de Green.

Exercício 4.8.3 Calcule a área entre as elipses $4x^2 + y^2 = 4$ e $4x^4 + 9y^2 = 36$, utilizando o Teorema de Green.