4.11 A Integral de Superfície em Campos Escalares

Vamos agora definir *Integrais de Superfície*. Para isso, procederemos como as integrais de linha, ou seja, iniciamos definindo integrais de superfícies em campos escalares.

Definição 4.11.1 *Seja S uma superfície suave, representada por $\vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in R$. Seja f um campo escalar definido e limitado sobre S. A Integral de Superfície de f, denotada por $\displaystyle\int\int_S f ds$, é definida por*

$$\int\int_S f ds = \int\int_R f(\vec{r}(u,v)) \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right| dudv,$$

quando a integral dupla à direita existir.

Definição 4.11.2 *Se S é uma superfícies suave por partes, então, a integral de superfícies $\displaystyle\int\int_S f ds$ é definida como sendo a soma das integrais obtidas sobre cada parte suave de S.*

Definição 4.11.3 *Se S é dada na forma explícita, digamos $z = z(x,y)$, então,*

$$\int\int_S f ds = \int\int_R f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemplo 4.11.1 *Calcule $I = \displaystyle\int\int_S [z - x^2 + xy^2 - 1] dS$, onde S é a superfície $\vec{r}(u,v) = (u, v, u^2+1)$, com $0 \leq u \leq 2$ e $0 \leq v \leq 5$.*

Solução: Temos que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 0, 1) \Rightarrow \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right| = \sqrt{4u^2+1}.$$

Daí, segue que

$$\int\int f dS = \int_0^2 \int_0^5 [u^2 + 1 - u^2 + uv^2 - 1] \sqrt{4u^2+1} dvdu = \int_0^2 \int_0^5 [uv^2] \sqrt{4u^2+1} dvdu =$$

$$= \frac{125}{3} \int_0^2 u\sqrt{4u^2+1} du.$$

Chamando $\omega = 4u^2 + 1$, segue que $d\omega = 8udu$ e, consequentemente,

$$\int\int f dS = \frac{125}{24} \int_0^2 \sqrt{\omega} d\omega = \frac{125}{36} (4u^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{125(17\sqrt{17} - 1)}{36}.$$

■

Exemplo 4.11.2 *Calcule* $I = \int\int_S x^2 z dS$, *onde* S *é a porção do cone* $z^2 = x^2 + y^2$ *que está entre os planos* $z = 1$ *e* $z = 4$.

Solução: Temos que $z \geq 0$. Então, tome $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Logo,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial 1}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$I = \sqrt{2}\int\int_R x^2\sqrt{x^2+y^2}dS.$$

Usando coordenadas polares, chegamos a

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2 cos^2(\theta).\sqrt{r^2}.rdrd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^5 cos^2(\theta)}{5}\right]\Bigg|_1^4 d\theta =$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} cos^2 d\theta = \frac{1023\sqrt{2}}{5}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1023\pi\sqrt{2}}{5}.$$

■

Exemplo 4.11.3 *Calcule* $I = \int\int_S (x+y+z)dS$, *onde* $S = S_1 \cup S_2$ *é a superfície representada pela Figura 4.24.*

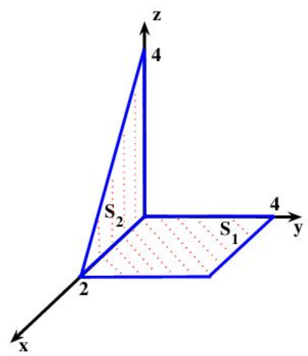

Figura 4.24: Ilustração da superfície S para o cálculo da integral de superfícies do Exemplo 4.11.3.

Solução: Temos que I_1 é dado por $z = z(x,y) = 0$, $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 4$. Consequentemente, $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Assim,

$$I_1 = \int_0^2\int_0^4 (x+y+0)\sqrt{1+0^2+0^2}dydx = \int_0^2\int_0^4 (x+y)dydx = \int_0^2\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^4 dx =$$

$$= \int_0^2 [4x+8]dx = [2x^2+8x]\Big|_0^2 = 8+16 = 24.$$

Por outro lado, temos que I_2 é dado por $y = y(x,y) = 0$, $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq z \leq 4-2x$. Consequentemente, $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial y}{\partial z} = 0$. Assim,

$$I_2 = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (x+0+z)\sqrt{1+0^2+0^2}dzdx = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (x+z)dzdx =$$

$$= \int_0^2 \left[xz + \frac{z^2}{2}\right]\Bigg|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 [4x-2x^2+2(4-4x+x^2)]dx = \int_0^2 [8-4x]dx =$$

$$= [8x-2x^2]\Big|_0^2 = 16-8 = 8.$$

Portanto, segue que

$$I = I_1 + I_2 = 24+8 = 32.$$

■

Uma interpretação física da integral de superfície em campos escalares, está relacionada com o cálculo da massa e do centro de massa de uma lâmina delgada, da mesma forma que a integral de linha estava relacionada com os mesmos tópicos para um fio delgado.

Suponha que S represente uma lâmina e que o campo escalar $f(x,y,z)$ representa a densidade no ponto (x,y,z). Então, a massa m da lâmina fica dada por

$$m = \int\int f(x,y,z)dS.$$

O centro de massa $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ fica dado por

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\int_S xf(x,y,z)dS \\ \bar{y} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\int_S yf(x,y,z)dS \\ \bar{z} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\int_S zf(x,y,z)dS \end{cases}.$$

Exemplo 4.11.4 *Uma lâmina tem a forma da parte de um plano $z = y$, recortada pelo cilindro $x^2+(y-1)^2 = 1$. Determine a massa dessa lâmina, sabendo que a densidade em cada ponto (x,y,z) da lâmina é diretamente proporcional à distância desse ponto ao plano XY.*

Solução: Como a densidade no ponto (x,y,z) é diretamente proporcional à distância desse ponto ao plano XY, segue que $f(x,y,z) = kz$, onde k é a constante de proporcionalidade. Além disso, observando a Figura 4.25, concluímos que $0 \leq y \leq 2$ e que $-\sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{1-(y-1)^2}$.

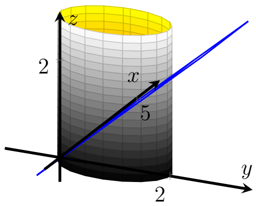

Figura 4.25: Ilustração da superfície do Exemplo 4.11.4.

Daí, como $f(x,y,z(x,y)) = ky$, segue que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = k$. Consequentemente,

$$m = \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} ky\sqrt{1+0^2+k^2}dxdy = 2k\sqrt{1+k^2}\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}dy =$$

$$= 2k\sqrt{1+k^2}\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}dy = 2k\sqrt{1+k^2}\left[\frac{2y^2-y-3}{6}\sqrt{2y-y^2}+\frac{arccos(1-y)}{2}\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2k\sqrt{1+k^2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = k\pi\sqrt{1+k^2}\ u.m.$$

■

Exemplo 4.11.5 *Determine o centro de massa do hemisfério $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, com densidade $f(x,y,z) = 0,3u.m./u.a.$.*

Solução: Seja $\vec{r}(u,v) = (cos(u)sen(v), sen(u)sen(v), cos(v))$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$. Então, segue que

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -sen(u)sen(v) & cos(u)sen(v) & 0 \\ cos(u)cos(v) & sen(u)cos(v) & -sen(v) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-cos(u)sen^2(v), sen(u)sen^2(v), -cos(v)sen(v)\right).$$

Dessa forma, temos que

$$\left|\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \right|\right| sen(v).$$

Assim,

$$m = \int\int_S f(x,y,z)dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0,3sen(v)dvdu = 0.3\int_0^{2\pi}\left(-cos(v)|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)du =$$

$$= 0.3 * u|_0^{2\pi} = 0.6\pi.$$

Dessa forma, temos que o centro de massa fica dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int\int_S xf(x,y,z)dS = \frac{1}{0.6\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(u)sen(v) * 0,3sen(v)dvdu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(u) * \left.\frac{(2v + sen(2v))}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} cos(u)du = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int\int_S yf(x,y,z)dS = \frac{1}{0.6\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(u)sen(v) * 0,3sen(v)dvdu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen(u) * \left.\frac{(2v + sen(2v))}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} sen(u)du = 0 \text{ e}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int\int_S zf(x,y,z)dS = \frac{1}{0.6\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(v) * 0,3sen(v)dvdu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(2v)}{2}dvdu = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} sen(2v)|_0^{\frac{\pi}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} -cos(2v)|_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} du = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ fica dado por $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. ■

Agora, faça alguns exercícios.

4.12 Exercícios

Exercício 4.12.1 *Calcule* $\int\int (x + y + z)dS$, *onde:*

a) S é a face superior do cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ *e* $0 \leq z \leq 1$*;*

b) S é a face da frente do mesmo cubo.

Exercício 4.12.2 *Calcule* $\int\int [x^2(y^2 + z^2)]dS$, *onde S é o hemisfério da frente da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercício 4.12.3 *Calcule* $\int\int [x^2 z]dS$, *onde S é a superfície cilíndrica* $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Exercício 4.12.4 *Calcule* $\int\int [x + z]dS$, *onde S é a superfície plana* $2x + 2y + z = 6$, *tomado no primeiro quadrante.*

Exercício 4.12.5 *Calcule* $\int\int [x^2(y^2 + z^2)dS$, *onde S é o hemisfério da frente da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercício 4.12.6 *Uma lâmina tem a forma da superfície lateral do cone* $z^2 = 4(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 2$. *Calcule a massa da lâmina se a densidade no ponto* (x, y, z) *é proporcional a distância do ponto ao eixo z.*

Exercício 4.12.7 *Calcular o centro de massa da parte da superfície esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ *que está abaixo do plano* $z = 2$ *e acima do plano* XY, *supondo a densidade constante.*

Exercício 4.12.8 *Uma lâmina tem a forma da parte do plano* $z = 2y + 1$ *recortada pelo cilindro* $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. *Determine a massa dessa lâmina se a densidade no ponto* (x, y, z) *é proporcional à distância desse ponto ao plano* XY.