1.3 Desigualdades em $\mathbb{R}$

Agora, vamos definir uma "*Ordem*" nos conjunto dos números reais. Em outras palavras, vamos definir quando um número a é *Maior* do que (ou *Menor* do que) outro número b dado.

Definição 1.3.1 *Se a e b são dois números reais, então, dizemos que:*

a) $a < b$ *se, e somente se,* $b - a$ *é positivo.*

b) $a > b$ *se, e somente se,* $a - b$ *é positivo.*

c) $a \leq b$ *se, e somente se, é válida qualquer uma das relações:* $a = b$ *ou* $a < b$.

d) $a \geq b$ *se, e somente se, é válida qualquer uma das relações:* $a = b$ *ou* $a > b$.

■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.3.1 *a)* $3 < 5$, *visto que* $5 - 3 = 2$ *é positivo;*

b) $-10 \leq -6$, *visto que* $-6 - (-10) = 4$ *é positivo;*

c) $7 > 2$, *visto que* $7 - 2 = 5$ *é positivo;*

d) $\dfrac{3}{4} \geq \dfrac{2}{3}$, *visto que* $\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12}$ *é positivo.*

■

Cada uma das sentenças do Exemplo 1.3.1 é chamada de *Desigualdade*, como estabelecido na definição a seguir.

Definição 1.3.2 *As sentenças $a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ e $a \neq b$ são chamadas de **Desigualdades**.*

■

Resolver problemas que envolvem expressões com desigualdades é muito comum na matemática. A seguir é apresentado um conjunto de propriedades que serão muito úteis.

Teorema 1.3.1 *Para quaisquer que sejam os números reais a, b e c temos as seguintes propriedades:*

a) $a > 0$ *se, e somente se, a for positivo;*

b) $a < 0$ *se, e somente se, a for negativo;*

c) se $a > 0$ *e* $b > 0$, *então,* $a + b > 0$ *e* $ab > 0$;

d) se $a < b$ *e* $b < c$, *então,* $a < c$;

e) se $a < b$, *então,* $a + c < b + c$;

f) se $a < b$ *e* $0 < c$, *então,* $ac < bc$;

g) se $a < b$ *e* $c < 0$*, então,* $ac > bc$*;*

h) se $a < b$ *e* $c < d$*, então,* $a + b < c + d$*.*

Demonstração: Não serão feitas nessas notas. ■

Vejamos algumas observações relevantes sobre o último teorema.

Observação 1.3.1 *a) O item f) do Teorema 1.3.1 estabelece que se ambos os membros de uma desigualdades são multiplicados por um número positivo, então, o sentido da desigualdade não se altera.*

b) O item g), do mesmo teorema, estabelece que se ambos os lados da desigualdade são multiplicados por um número negativo, então, a desigualdade deve ser invertida.

c) Como a divisão de dois números reais é o mesmo que multiplicar o numerador pelo inverso do número que está no denominador, o procedimento utilizado na divisão de dois números, em relação ao sentido da desigualdade, é o mesmo utilizado pela multiplicação.

■

De uma forma geral, intervalos são utilizados para representar o *Conjunto Solução* de uma desigualdade. O conjunto solução de uma sentença é formado por todos os números reais que tornam a sentença verdadeira.

Exemplo 1.3.2 *Encontre o conjunto solução da desigualdade*

$$2 + 3x < 5x + 8.$$

Solução: Uma estratégia para resolver uma desigualdade, é separar todos os termos que possuem variáveis dos termos constantes (que não possuem variáveis). Assim,

$$2 + 3x < 5x + 8 \Leftrightarrow 2 + 3x - 2 < 5x + 8 - 2 \Leftrightarrow 3x < 5x + 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x - 5x < 5x + 6 - 5x \Leftrightarrow -2x < 6 \Leftrightarrow -2\left(-\frac{1}{2}\right) > 6\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > -3.$$

Portanto, o conjunto solução da desigualdade é o intervalo $S =]-3, +\infty[$. ■

Exemplo 1.3.3 *Encontre o conjunto solução da desigualdade* $4 < 3x + 2 \leq 10$.

Solução: Observe que existem duas desigualdades:

$$\begin{cases} 4 & < & 3x + 2 \text{ e} \\ 3x + 2 & \leq & 10 \end{cases}.$$

Resolvê-las ao mesmo tempo, de uma forma geral, não é uma tarefa muito simples. Assim, o procedimento padrão costuma ser o de resolver cada uma das desigualdades em separado e, com isso, temos que a solução do problema fica dado pela interseção das soluções encontradas para as duas sentenças. Daí,

$$4 < 3x + 2 \Leftrightarrow 3x > 4 - 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3} \text{ e}$$

$$3x+2 \leq 10 \Leftrightarrow 3x \leq 10-2 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}.$$

Logo, o conjunto solução da desigualdade tem que satisfazer $x > \frac{2}{3}$ e $x \leq \frac{8}{3}$. Como pode ser visto na Figura 1.7, temos que o conjunto solução da desigualdade fica dado por $S = \left]\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right]$.

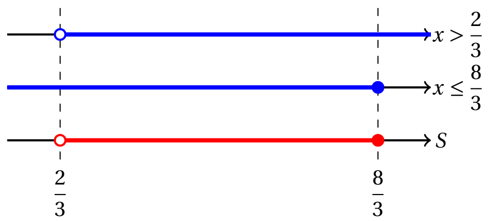

Figura 1.7: Obtendo o conjunto solução S da desigualdade do Exemplo 1.3.3.

■

Exemplo 1.3.4 *Encontre o conjunto solução da desigualdade* $\frac{7}{x} > 2$.

Solução: Observe que o denominador no primeiro membro da desigualdade pode ser um número positivo ou um número negativo, dependendo do sinal do x. Por isso, não se deve multiplicar ambos os lados da desigualdade por x, sem prestar atenção nesse detalhe.

Nesse caso específico, temos que o quociente precisa ser um número positivo, visto que o 7 é maior do que zero e o quociente $\frac{7}{x} > 2$ e, consequentemente, $\frac{7}{x} > 0$ é maior do que 0, visto que $2 > 0$. Assim,

$$\frac{7}{x} > 2 \Leftrightarrow 2x < 7 \text{ e } x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{7}{2}.$$

Portanto, o conjunto solução da desigualdade fica dado por $S = \left]0, \frac{7}{2}\right[$. ■

Exemplo 1.3.5 *Encontre o conjunto solução da desigualdade* $\frac{x}{x-3} < 4$.

Solução: Nesse tipo de problema, uma nova situação se apresenta. Existe uma divisão de duas sentenças que podem ser positivas ou negativas. Além disso, não é aconselhado comparar o primeiro membro com o segundo da forma que se encontra, visto que o segundo membro é um número não nulo.

Então, para situações semelhantes a essas, devemos deixar um dos lados da sentença nulo e, então, fazemos a comparação de sinal entre as sentenças. Assim,

$$\frac{x}{x-3} < 4 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+12}{x-3} < 0.$$

Daí, o conjunto solução da desigualdade é formado por todos os números reais que satisfazem a desigualdade $\frac{-3x+12}{x-3} < 0$.

Na nova desigualdade, temos a divisão de duas sentenças, que podem ser positivas, negativas ou nula. Logo, é necessário fazer um estudo do sinal dessas expressões, pois se ambos os elementos da divisão tem o mesmo sinal, a divisão fica positiva e se os elementos da divisão tem o sinais diferentes, o quociente fica negativo.

Para a expressão do numerador, temos que para $x = 4$ o numerador vale zero, já para números maiores do que 4 o numerador fica negativo e para números menores do que 4 o numerador fica positivo. Já para o denominador, temos que para $x = 3$ a sentença vale zero, para números menores do que 3 o denominador fica negativo e para números maiores do que 3 o denominador fica positivo.

O denominador nunca pode assumir o valor $x = 3$. Na Figura 1.8 podemos observar, analisar e efetuar o estudo de sinal da divisão, obtendo assim, o conjunto solução da desigualdade. Assim,

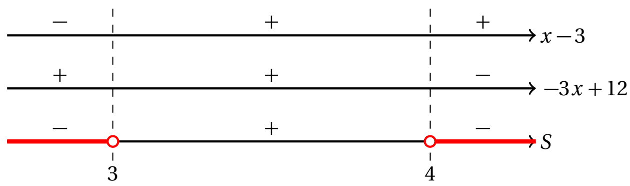

Figura 1.8: Obtendo do conjunto solução S da desigualdade do Exemplo 1.3.5.

Portanto, o conjunto solução da desigualdade fica dado por $S =]-\infty, 3[\bigcup]4, +\infty[$.

■

Agora, tente fazer alguns exercícios para fixar o conteúdo. Bons estudos.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1 *Obtenha o conjunto solução de cada uma das desigualdades abaixo.*

a) $3x + 7 \leq -5 - x$;

b) $2x - 13 \geq 5x + 2$;

c) $5x + 2 > x - 6$;

d) $3 - x < 5 + 3x$;

e) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{2} \leq 0$;

f) $3 - 2x \geq 9 + 4x$;

g) $13 \geq 2x - 3 \geq 5$;

h) $-2 < 6 - 4x \leq 8$;

i) $2 > -3 - 3x \geq -7$;

j) $2 \leq 5 - 3x < 11$;

k) $\dfrac{4}{x} - 3 > \dfrac{2}{x} - 7$;

l) $\dfrac{5}{x} < \dfrac{3}{4}$;

m) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{2}{3x-1}$;

n) $\dfrac{x+1}{2-x} < \dfrac{x}{3+x}$;

o) $x^2 > 4$;

p) $x^2 \leq 9$;

q) $(x-3)(x+5) \geq 0$;

r) $x^2 - 3x + 2 > 0$;

s) $1 - x - 2x^2 \geq 0$;

t) $x^2 + 3x + 1 > 0$;

u) $2x^2 - 6x + 3 < 0$;

v) $4x^2 + 9x < 9$;

w) $\dfrac{1}{3x-7} \geq \dfrac{4}{3-2x}$;

x) $x^3 + 1 > x^2 + x$;

y) $\dfrac{2x-1}{4x+8} \geq \dfrac{4-x}{1+2x}$;

z) $\dfrac{x-1}{x-6} \geq \dfrac{2x-4}{12-5x}$.

Exercício 1.4.2 *Uma empresa fabrica sapatos com um custo fixo mensal de* $R\$3500,00$. *Cada sapato custa* $R\$25,00$ *para ser produzido. Sabendo que esses sapatos serão vendidos por* $R\$55,00$, *qual a quantidade mínima de sapatos que deve ser produzida para que a quantia arrecadada supere o custo de produção?*

Exercício 1.4.3 *Determine os valores de* x *para que exista um triângulo com os lados medindo* 5, 3 *e* $2x-1$.

Exercício 1.4.4 *Determine os valores de* x *para que exista um triângulo com os lados medindo* $5x-4$, $2x+3$ *e* $x+5$.

Exercício 1.4.5 *Duas pequenas fábricas de calçados,* A *e* B, *têm fabricado, respectivamente,* 3000 *e* 1100 *pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica* A *aumentar sucessivamente a produção em* 70 *pares por mês e a fábrica* B *aumentar sucessivamente a produção em* 290 *pares por mês, a produção da fábrica* B *superará a produção de* A *a partir de que período?*

1.5 Valor Absoluto

Exercício 1.4.6 *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. *Suponha que* $\dfrac{a+b}{b} \geq \dfrac{c+d}{d}$. *Então, mostre que*

$$\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}.$$

Exercício 1.4.7 *Sabendo que* a, b, c *e* d *são números reais positivos, prove cada uma das desigualdades a seguir:*

a) $abc \leq \sqrt{\dfrac{abc(a^2b+b^2c+c^2a)}{3}} \leq \dfrac{abc(a^2b+b^2c+c^2a)}{3}$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt{\dfrac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$;

c) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.