

1.5 Valor Absoluto

O conceito de *Módulo*, ou *Valor Absoluto*, é utilizado em algumas das definições mais importantes da matemática como, por exemplo, a definição de *Limite de Funções*. O uso do módulo nessas definições, geralmente, nos leva a trabalhar com desigualdades. A seguir apresentamos a definição do módulo de um número real.

Definição 1.5.1 O *Módulo* (ou o *Valor Absoluto*) de x , denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

■

Da Definição 1.5.1, temos que o valor absoluto de um número real é sempre um número maior do que ou igual a zero. Geometricamente, o módulo de um número pode ser interpretado como sendo a medida da distância do número ao zero e, para um caso geral, $|a - b|$ pode ser interpretado como sendo a distância entre os números a e b , sem necessidade de observar qual dos números está à direita, ou seja, qual deles é o maior. Vamos agora apresentar algumas propriedades.

Teorema 1.5.1 O conceito de módulo de um número apresenta as seguintes propriedades: Para todo número $a, b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}_+^*$ temos que:

- a) $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$;
- b) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$;
- c) $|x| > c \Leftrightarrow x < -c \text{ ou } x > c$;
- d) $|x| \geq c \Leftrightarrow x \leq -c \text{ ou } x \geq c$;
- e) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- f) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$;
- g) (**Desigualdade Triangular**) $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- h) $|a - b| \leq |a| + |b|$;
- i) $|a| - |b| \leq |a - b|$;

Demonstração: Não serão feitas nessas notas. ■

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.5.1 Resolva cada uma das equações modulares a seguir:

- a) $|3x + 2| = 5$;
- b) $|2x - 1| = |4x + 3|$;
- c) $|5x + 4| = -3$.

Solução:

a) Temos que

$$|3x+2|=5 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2 = 5 \\ 3x+2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 5-2 \\ 3x = -5-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ 3x = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{ -\frac{7}{3}, 1 \right\}$.

- b) Temos duas situações: ou as duas expressões tem o mesmo sinal ou elas tem sinais opostos. Assim,

$$|2x-1|=|4x+3| \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 4x+3 \\ 2x-1 = -(4x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-3 = 4x-2x \\ 2x+4x = -3+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = -4 \\ 6x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto solução da equação é dado por $S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$.

- c) Observe que o módulo é igual a um número negativo, o que é um absurdo, visto que o módulo de um número é sempre maior do que ou igual a zero. Portanto, o conjunto solução da equação é o conjunto vazio, ou seja, $S = \emptyset$.

■

Exemplo 1.5.2 Encontre o conjunto solução da inequação $|x-5| < 4$.

Solução: Usando as propriedades de valor absoluto temos que:

$$|x-5| < 4 \Rightarrow -4 < x-5 < 4 \Rightarrow 5-4 < x < 5+4 \Rightarrow 1 < x < 9.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é $S =]1, 9[$.

■

Exemplo 1.5.3 Encontre o conjunto solução da inequação $|3x+2| > 5$.

Solução: Usando as propriedades de valor absoluto, temos que:

$$|3x+2| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2 > 5 \\ \text{ou} \\ 3x+2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2 > 5 \\ \text{ou} \\ 3x+2 < -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 3 \\ \text{ou} \\ 3x < -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{ou} \\ x < -\frac{7}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é dado por $\left]-\infty, -\frac{7}{3}\right[\cup]1, +\infty[$.

■

Existe uma relação direta entre o módulo de um número real e a raiz quadrada do quadrado desse número, como pode ser observado a seguir.

Observação 1.5.1 Temos que $|x| = x$ ou $|x| = -x$. Portanto, $|x|^2 = x^2$ que equivale a $|x| = \sqrt{x^2}$. Sendo assim, a definição de valor absoluto pode ser reescrita da forma:

“Para todo número real x temos que $|x| = \sqrt{x^2}$.”

Além disso, lembremos que o símbolo $x = \sqrt[n]{a}$, para $a \geq 0$ e n par, representa o único número real x não negativo tal que $x^n = a$ (n par) e, por isso, $\sqrt[n]{x}$ (n par) só faz sentido para números reais tais que $x \geq 0$.

■

Usamos essa última observação para obter condição de existência de equações envolvendo raízes de índices pares. Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.5.4 Encontre todos os valores de x para os quais a raiz $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ represente um número real.

Solução: Uma raiz quadrada com radicando negativo não representa um número real. Logo, como $x^2 + 7x + 12 = (x + 4)(x + 3)$, segue que $\sqrt{x^2 + 7x + 12}$ representa um número real se, e somente se, $(x + 4)(x + 3) \geq 0$. Fazendo um estudo de sinal da inequação pela Figura 1.9, observe que:



Figura 1.9: Estudo do sinal da inequação $(x + 4)(x + 3) \geq 0$.

Portanto, a raiz representa um número real para todo $x \in]-\infty, -4] \cup [-3, +\infty[$.

■

Agora, exercite os conhecimentos fazendo exercícios. Bons estudos.

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1 Encontre todos os valores de x para que cada uma das raízes a seguir represente números reais.

- | | | | |
|---------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| a) $\sqrt{8x-5}$; | e) $\sqrt{5x+1}$; | i) $\sqrt{x^2-3x-10}$; | m) $\sqrt{2x^2+5x-3}$; |
| b) $\sqrt{3x+6}$; | f) $\sqrt{(x-3)(x+5)}$; | j) $\sqrt{x^2+2x+2}$; | n) $\sqrt[4]{x^2-5x+4}$; |
| c) $\sqrt{2-12x}$; | g) $\sqrt{(-x-2)(x-4)}$; | k) $\sqrt{x^2-4x}$; | o) $\sqrt[4]{x^2+2x+1}$; |
| d) $\sqrt{2x-5}$; | h) $\sqrt{x^2-16}$; | l) $\sqrt{-x-2x^2}$; | p) $\sqrt[6]{x^2+2x-1}$. |

Exercício 1.6.2 Encontre o conjunto solução de cada uma das igualdades a seguir.

- | | | |
|----------------------|----------------------------|--|
| a) $ x-7 =5$; | h) $ 3x+1 = x-3 $; | o) $\left \frac{x+2}{x-2} \right = 5$; |
| b) $ x+3 =7$; | i) $ x ^2 + x - 6 = 0$; | |
| c) $ 4x+3 =7$; | j) $ 7x =4-x$; | p) $\left \frac{6-5x}{3+x} \right = \frac{5}{6}$; |
| d) $ 9x+2 =-3$; | k) $ 3x+2 =x+1$; | |
| e) $ 3x-8 =4$; | l) $ 5x-6 =x^2$; | q) $\left \frac{3x+8}{2x-3} \right = 4$; |
| f) $ 5x-3 = 3x+5 $; | m) $2x+3= 4x+5 $; | |
| g) $ x-2 = 3-2x $; | n) $ x-3 + x-5 =10$; | r) $\left \frac{2x-1}{x+2} \right = \left \frac{3x+2}{x-4} \right $. |

Exercício 1.6.3 Encontre o conjunto solução de cada uma das desigualdades a seguir.

$$a) |x+4| < 7;$$

$$b) |2x-5| < 3;$$

$$c) |3x-4| \leq 2;$$

$$d) |3x+2| \geq 1;$$

$$e) |5-x| > 7;$$

$$f) |3-x| < 5;$$

$$g) |7-4x| \leq 9;$$

$$h) |6-2x| \geq 7;$$

$$i) |2x-5| > 3;$$

$$j) |x+4| \leq |2x-6|;$$

$$k) |3x| > |6-3x|;$$

$$l) |3+2x| < |4-x|;$$

$$m) |x-2| - |x-4| \leq 1-x;$$

$$n) |x+1| - |x-2| > 4;$$

$$o) |9-2x| \geq |4x|;$$

$$p) |5-2x| \geq 7;$$

$$q) \left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 4;$$

$$r) \left| \frac{x+1}{2x-1} \right| \leq 2;$$

$$s) \left| \frac{6-5x}{3+x} \right| \leq \frac{1}{2};$$

$$t) |2x-4| \geq 5x-3;$$

$$u) |3x-5| < 6-2x;$$

$$v) \left| \frac{x-2}{x-4} \right| > \frac{x+2}{x}.$$