

Capítulo 8

Derivadas

Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. O quociente $q(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ tem sentido para todo $x \neq a$. Dessa forma, temos que $q : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ define, por exemplo, uma função cujo valor $q(x)$ dá o valor da inclinação da reta secante que liga os pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, no gráfico de f em relação ao eixo x .

Agora, suponha que x seja o tempo e que $f(x)$ represente o deslocamento de uma partícula, no instante x . Então, o quociente $q(x)$ representa, neste caso, a velocidade média desse ponto no intervalo de tempo entre os instantes a e x .

Esses dois exemplos são casos particulares, pois podemos observar o quociente $q(x)$, de uma forma mais geral, como sendo uma relação de variação da função $f(x)$ por unidade de variação de x , a partir do ponto a . Além disso, no caso onde $a \in X \cap X'$ é natural pensar em $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$. Se esse limite existir, então, ele pode ser interpretado, por exemplo, como sendo a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ ou como a velocidade instantânea de uma partícula no instante $x = a$ e, de uma forma mais em geral, como sendo a taxa de variação instantânea da função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$. Esse limite é de grande importância e é o nosso objeto de estudo nesse capítulo.

8.1 A noção de Derivada

Definição 8.1.1 Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A **Derivada** da função f no ponto a é o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Caso a derivada de f exista no ponto a , então, dizemos que f é **Derivável** no ponto a . ■

Definição 8.1.2 Se uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos $x \in X \cap X'$, então, dizemos que f é **Derivável** em X . ■

Definição 8.1.3 Seja $f' : X \cap X' \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, a função derivada de uma função $f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se f' for contínua, então, temos que f é dita ser de **Classe** C^1 . ■

Existem outras notações para a derivada de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$, onde destacamos

$$Df(a), \frac{df}{dx}(a) \text{ e } \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

Vejam as primeiras propriedades.

Teorema 8.1.1 *A fim de que $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$ é necessário e suficiente que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in X$ implique em*

$$f(a + h) = f(a) + c \cdot h + r(h),$$

onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. No caso afirmativo, temos que $c = f'(a)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $Y = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in X\}$. Dessa forma, temos que $0 \in Y \cap Y'$. Suponha que $f'(a)$ exista. Dessa forma, tome a função $r : Y \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h$. Assim,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a).$$

Como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$, segue que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, se vale a condição $\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c$, com $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$, segue que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - c = 0$ e, por isso, temos que

$$c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

■

Corolário 8.1.1 *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua nos pontos onde ela é derivável.*

Demonstração: Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X$. Então, segue do Teorema 8.1.1 que $f(a + h) = f(a) - f'(a)h + r(h)$, onde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Dessa forma, $f(a)$ existe e, além disso,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(a) - f'(a) \cdot h + \frac{r(h)}{h} h \right) = f(a).$$

Portanto, temos que $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

■

Observação 8.1.1 *Para toda função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida nos pontos $a, a + h \in X$, e todo número real c , podemos escrever a igualdade $f(a + h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, a qual define o número $r(h)$. Contudo, o Teorema 8.1.1 afirma que existe no máximo um número real c tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ e, além disso, quando esse número c existe, ele é dado por $c = f'(a)$.*

■

O Teorema 8.1.1 ainda afirma que, quando $f'(a)$ existe, segue que o acréscimo $f(a+h) - f(a)$ é a soma de uma “parte linear” $c \cdot h$, proporcional ao acréscimo h da variável independente, mais um “resto” $r(h)$, o qual é infinitamente pequeno em relação a h , no sentido de que o quociente $\frac{r(h)}{h}$ tende a zero com $h \rightarrow 0$. Agora apresentaremos a definição de *Derivadas Laterais*. As definições aqui apresentadas utilizam a mesma ideia dos limites laterais. Vamos as definições.

Definição 8.1.4 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_+$. A **Derivada à Direita** da função f no ponto a é o limite*

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir.

■

Definição 8.1.5 *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'_-$. A **Derivada à Esquerda** da função f no ponto a é o limite*

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existir.

■

Observação 8.1.2 *a) Se $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$, ou seja, se a é um ponto de acumulação bilateral de X , então, a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em a se, e somente se, $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$ existem e, além disso, temos que $f'_-(a) = f'_+(a)$.*

b) O Teorema 8.1.1 pode ser adaptado para os limites laterais. Por exemplo, para derivada à direita é preciso considerar $\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{r(h)}{h} = 0$.

c) O Corolário 8.1.1 pode ser adaptado para a continuidade lateral. Por exemplo, se existe a derivada lateral à direita da função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $a \in X$, então, f é contínua em a e, além disso, $\lim_{h \rightarrow 0_+} f(a+h) = f(a)$.

d) Se $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ e f'_+, f'_- existem, então, a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua à direita e à esquerda em a e, por isso, f é uma função contínua em a , mesmo que a função f não seja derivável em a .

■

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 8.1.1 *a) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$) é derivável em todos os pontos do seu domínio. Além disso, $f' \equiv 0$.*

De fato: *Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que*

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto $f(x) = k$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x) = 0$.

□

- b) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) é derivável em todos os pontos do seu domínio. Além disso, $f'(x) = a$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato: Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x+h) + b] - [ax + b]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $f(x) = ax + b$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x) = a$. $\square$

- c) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) é derivável em todos os pontos do seu domínio. Além disso, $f'(x) = nx^{n-1}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato: Usando Binômio de Newton, temos que

$$(x+h)^n = \binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n,$$

e, por isso, temos que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-1}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + h \left(\binom{n}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^{n-2} \right) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [nx^{n-1} + hg(x, h)] = nx^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $f(x) = x^n$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$ e, além disso, $f'(x) = nx^{n-1}$. $\square$

- d) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e possui derivada em todos os pontos tais que $x \neq 0$. Contudo, $f'(0)$ não existe.

De fato: Observe que, para $x = 0$, temos que:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

e, por isso, segue que $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ que não existe (Exemplo 6.1.4).

Por outro lado, para $x \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right) - x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x \left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right]}{h}. \end{aligned}$$

Como

$$\operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right),$$

chamando de $A = \frac{1}{x+h}$ e $B = \frac{1}{x}$, temos que

$$\frac{A-B}{2} = \frac{-h}{2x(x+h)} \text{ e } \frac{A+B}{2} = \frac{2x+h}{2x(x+h)}.$$

Assim,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x+h}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{-h}{2x(x+h)}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right).$$

Consequentemente,

$$f'(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x\operatorname{sen}\left(\frac{-h}{2x(x+h)}\right)\cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right)}{h}.$$

Observe que: tomando $u = \frac{-h}{2x(x+h)}$, então, se $h \rightarrow 0$, segue que $u \rightarrow 0$. Assim,

assumindo o limite fundamental $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$, segue que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x+h} \left(-\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{-h}{2x(x+h)}\right)}{\frac{-h}{2x(x+h)}} \right) \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2x(x+h)}\right) = \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Portanto, como

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ \nexists, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

segue que f é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

e) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$ e possui derivada em todos os pontos.

De fato: Observe que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right),$$

e, por isso, segue que $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. Portanto, como

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

segue que a função f é derivável em todo $x \in \mathbb{R}$. □

f) A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Porém, temos que a função f não é de classe C^1 .

De fato: Observe que $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Como

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{-h-0}{h} = -1 \text{ e } f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{h-0}{h} = 1,$$

segue que $f'(0)$ não existe. Assim, sabendo que

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ \nexists, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

segue que a função f é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mas a função f não é de classe C^1 , visto que a sua derivada f' não é contínua em $x = 0$. □

g) A **Função Maior Inteiro** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \lceil x \rceil = n$, para todo $n \leq x < n+1$ é derivável em todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

De fato: Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ temos que $f'(x) = \frac{d}{dx}(n) = 0$. Por outro lado, para $x = n \in \mathbb{Z}$, segue que $f_-(x) = n-1$ e que $f_+(x) = n$. Daí, temos que

$$f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{-(n-1)-n}{h} = +\infty \text{ e } f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{n-n}{h} = 0.$$

Portanto, segue que $f'(x)$ não existe se $x = n \in \mathbb{Z}$. □

■

Agora vamos apresentar a **Regra de L'Hôpital**, que é uma das aplicações mais conhecidas e utilizadas relacionadas com derivada de funções reais, visto que ela auxilia no cálculo de limites indeterminados.

Teorema 8.1.2 (A Regra de L'Hôpital): Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto $a \in X \cap X'$ tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Nessas condições, temos que se $g'(a) \neq 0$, então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração: Como f e g são deriváveis, segue que ambas são contínuas e, por isso, $f(a) = 0 = g(a)$. Assim, temos que $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a}$ e $g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x - a}$. Dessa forma, temos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{x - a}}{\frac{g(x)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

■

Corolário 8.1.2 Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$. Nessas condições, temos que se $g'(a) \neq 0$, então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstração: Como $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \pm\infty$ se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{h(x)} = 0$ e como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)}{1}}{\frac{g(x)}{f(x)}}, \text{ segue do Teorema 8.1.2 o resultado.}$$

■

Vejamos um exemplo.

Exemplo 8.1.2 Considere $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções dadas por $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ e $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Para a função f temos que, $\sin(x) \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow 0$. Daí,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Big|_{x=0} = \frac{\cos(x)}{1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por outro lado, para a função g , temos que $(e^x - 1) \rightarrow 0$ e $x \rightarrow 0$, quando $x \rightarrow 0$. Daí,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \Big|_{x=0} = \frac{e^x}{1} \Big|_{x=0} = \frac{e^0}{1} = 1.$$

■

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos.