Capítulo 3

Operadores Vetoriais e Aplicações

Vamos agora estudar alguns operadores relacionados a funções escalares e funções vetoriais. Vamos iniciar o nosso estudo na Seção 3.1 diferenciando *Campos Escalares* de *Campos Vetoriais*. Na Seção 3.3 estudaremos a derivada direcional e o vetor gradiente dos campos escalares. Na Seção 3.5 estudaremos o divergente e na Seção 3.7 estudaremos o rotacional de campos vetoriais. Por fim, na Seção 3.9 estudaremos o que são campos vetoriais conservativos.

3.1 Campos Escalares e Campos Vetoriais

Dada uma região $D \in \mathbb{R}^3$, é possível associar a cada ponto $P = (x, y, z) \in D$ a uma grandeza escalar. Por exemplo, dado um corpo sólido T, podemos associar a cada um dos seus pontos a sua temperatura. Esse novo conjunto, formado pelos elementos de D e os pontos que foram associados a eles é chamado de *Campo Escalar*, como definido a seguir.

Definição 3.1.1 *Seja $D \in \mathbb{R}^3$ uma região no espaço e seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função. Então, a região D junto com todos os valores correspondente de $f(P)$, é chamado de Campo Escalar. Dizemos também que f define um campo escalar sobre D.*

Veja alguns exemplos de campos escalares.

Exemplo 3.1.1 *a) Sejam $D \in \mathbb{R}^3$ é um sólido e $\rho \in \mathbb{R}$ a densidade de cada um dos pontos do sólido D. Então, ρ define um campo escalar sobre D.*

b) Seja $D \in \mathbb{R}^3$ um sólido esférico de raio r, cuja temperatura em cada um dos seus pontos é proporcional à distância do ponto até o centro da esfera. Então, a função escalar T define um campo escalar de temperatura em D.

Exemplo 3.1.2 *Um tanque T tem a forma de um cilindro circular reto de raio $1m$ e altura $3m$. O tanque está cheio de uma substância líquida. Cada partícula dessa substância está sujeita a uma pressão que é proporcional à distância da partícula até a superfície livre do líquido. Usando coordenadas cartesianas, defina uma função escalar que descreva o campo de pressão no interior de T.*

Solução: Tome o sistema de coordenadas cartesianas de forma que a origem do sistema coincida com ao centro da base do cilindro. Assim, temos que a distância que qualquer partícula até a superfície livre do líquido é dada por $d = 3 - z$, onde z é a distância da partícula ao plano XY.

Portanto, a função P que define o campo escalar de pressão no interior de T é dada por $P(x, y, z) = k(3-z)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.
■

Exemplo 3.1.3 *Um campo minado pode visto como um campo escalar sobre uma região R do plano, da seguinte forma: considere um campo de área $R \subset \mathbb{R}^2$, onde serão escolhidos pontos aleatórios nos quais serão colocados explosivos. Então, se for considerada a função escalar*

$$f(P) = \begin{cases} 1, & \textit{se existe uma mina em } P \in R; \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

Então, f define um campo escalar sobre a região R.

■

Usando a mesma ideia de campos escalares, se utilizarmos uma função vetorial em vez de uma função escalar, teremos os chamados *Campos Vetoriais*, como definido a seguir.

Definição 3.1.2 *Seja $D \in \mathbb{R}^3$ uma região no espaço e seja $\vec{f} : vD \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função vetorial. Então, a cada ponto $P \in D$ associamos a um único vetor $\vec{f}(P)$. A região D juntamente com todos os vetores correspondentes $\vec{f}(P)$ é chamado de Campo Vetorial. Dizemos também que $\vec{f}$ define um campo vetorial sobre D.*

Campos vetoriais são usados constantemente em muitas áreas do conhecimento. A representação de campos vetoriais pode ser visto até mesmo quando assistimos o canal do tempo. Conhecer o comportamento de um campo vetorial através de sua representação gráfica ajudar a resolver problemas diversos. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.1.4 *a) Seja D a atmosfera da Terra. Se a cada ponto $P \in D$ associarmos o vetor $\vec{v}(P)$ que representa a velocidade do vento em P, então, $\vec{v}$ define um campo vetorial em D, chamado de campo de velocidades.*

b) Temos que $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^2$.

c) Temos que $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, -z)$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$.

Observação 3.1.1 *Geralmente, identificamos uma função f como sendo o campo escalar que ela define. Analogamente, identificamos a função $\vec{f}$ como sendo o campo vetorial definido por ela. Assim, por exemplo, no Exemplo 3.1.2 o campo escalar fica dado por $P(x, y, z) = k(3 - z)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.*

Por isso, de agora em diante, falaremos que f é o campo escapar ou que $\vec{f}$ é o campo vetorial, só para simplificar os enunciados.

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.1.5 *Considere o campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$*. Represente os elementos do campo vetorial dos pontos* $(1,2)$*,* $(-1,3)$ *e* $(-2,-2)$*.*

Solução: Temos que

- $\vec{f}(1,2) = \left(1, \dfrac{2}{2}\right) = (1,1)$;
- $\vec{f}(-1,3) = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$;
- $\vec{f}(-2,-2) = \left(-2, \dfrac{-2}{2}\right) = (-2,-1)$.

Então, representando cada um desses vetores no plano, obtemos a Figura 3.1.

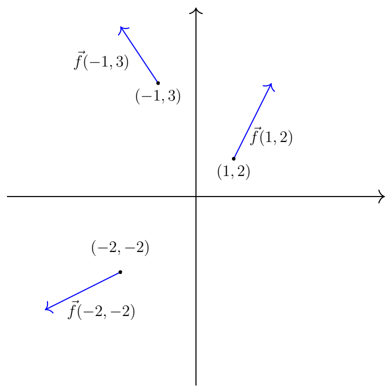

Figura 3.1: Representação de alguns dos elementos do campo vetorial $\vec{f}(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$.

■

Representação Geométrica de um Campo Vetorial

É possível representar graficamente um campo vetorial $\vec{f}$ definido em uma região D. Para isso, tomamos alguns pontos $P \in D$ e desenhamos o vetor $\vec{f}(P)$ correspondente, como sendo uma seta com a origem em P (fazendo uma translação da origem para P). Assim, visualizaremos o campo vetorial, "imaginando" a seta apropriada emanando de cada ponto da região D.

Exemplo 3.1.6 *Considere o campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = \vec{j}$*. Represente geometricamente esse campo vetorial.*

Solução: Observe que para esse campo, em todos os pontos temos que $\vec{f}(x,y) = (0,1)$. Assim, uma representação desse campo fica dado pela Figura 3.2.

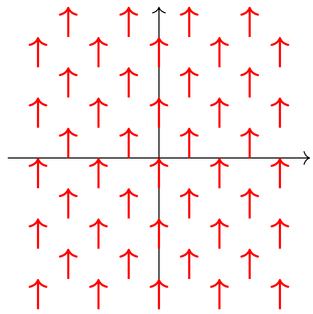

Figura 3.2: Representação do campo vetorial $\vec{f}(x, y) = \vec{j}$.

■

Exemplo 3.1.7 *Considere o campo vetorial definido por* $\vec{f}(x, y) = x\vec{i}$. *Represente geometricamente esse campo vetorial.*

Solução: Seja o campo vetorial $\vec{f}(x, y) = x\vec{i}$. Dessa forma, $\vec{f}$ define um campo vetorial sobre o $\mathbb{R}^2$ e, além disso:

- A todos os pontos do eixo y, isto é, a todos os pontos da forma $(0, y)$ temos que $\vec{f}$ o associa ao vetor nulo, ou seja, $\vec{f}(0, y) = \vec{0}$;
- A todos os pontos da reta $x = 1$, ou seja, a todos os pontos da forma $(1, y)$ temos que $\vec{f}(1, y) = \vec{i}$;
- A todos os pontos da reta $x = -1$, ou seja, a todos os pontos da forma $(-1, y)$ temos que $\vec{f}(-1, y) = -\vec{i}$;
- A todos os pontos da reta $x = 2$, ou seja, a todos os pontos da forma $(2, y)$ temos que $\vec{f}(2, y) = 2\vec{i}$;
- A todos os pontos da reta $x = -2$, ou seja, a todos os pontos da forma $(-2, y)$ temos que $\vec{f}(-2, y) = -2\vec{i}$;
- E assim por diante...

De uma forma geral, temos que $\vec{f}$ associa a todos os pontos que estão sobre uma reta vertical $x = a$ ao vetor $a\vec{i}$. Assim, na Figura 3.3 temos uma representação desse campo.

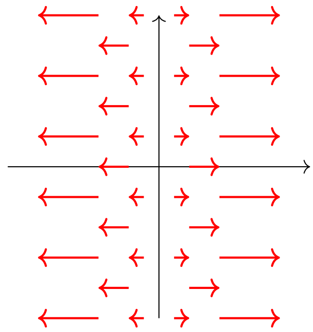

Figura 3.3: Representação do campo vetorial definido por $\vec{f}(x, y) = x\vec{i}$.

■

Exemplo 3.1.8 *Considere o campo vetorial $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$. Represente geometricamente esse campo vetorial.*

Solução: Seja o campo vetorial $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$. Dessa forma, $\vec{f}$ define um campo vetorial sobre o $\mathbb{R}^2$. Observe que para cada ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o vetor correspondente é obtido invertendo a abscissa com o oposto da ordenada. Assim, na Figura 3.4 temos uma representação desse campo.

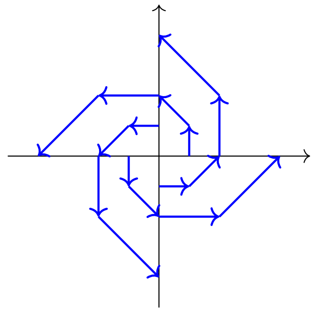

Figura 3.4: Representação do campo vetorial definido por $\vec{f}(x,y) = (-y.x)$.

■

Exemplo 3.1.9 *Considere o campo vetorial definido por $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Represente geometricamente esse campo vetorial.*

Solução: Como o campo vetorial é definido por $\vec{f}(x,y) = x\vec{i}+y\vec{j}$, segue que $\vec{f}$ associa a cada ponto (x,y) do plano o seu vetor posição $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Para representar esse campo, trace algumas retas passando pela origem e algumas circunferências com centro na origem. Desenhe os vetores correspondentes aos pontos de intersecção das circunferências com as retas. Assim, na Figura 3.5, temos uma representação desse campo.

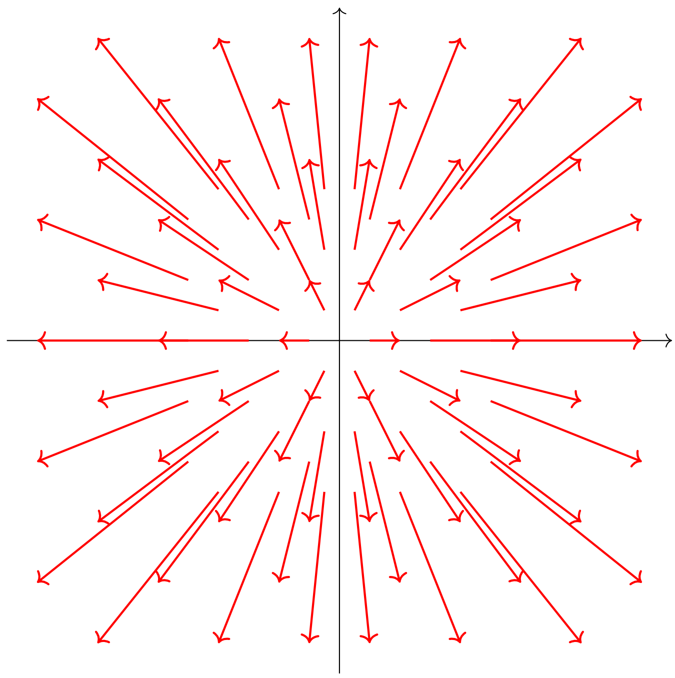

Figura 3.5: Representação do campo vetorial definido por $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

■

Exemplo 3.1.10 *Considere o campo vetorial definido por*

$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}.$$

Então, represente geometricamente esse campo vetorial.

Solução: Como o campo vetorial é dado por $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$, segue que para todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ temos que $\vec{f}(x,y)$ é um vetor unitário. Além disso, temos que se $\vec{r} = (x,y)$ é o vetor posição do ponto (x,y) então, segue que $\vec{r}.\vec{f}(x,y) = \vec{0}$, ou seja, $\vec{f}(x,y)$ é perpendicular ao vetor posição $\vec{r}(x,y) = (x,y)$.

Logo, $\vec{f}(x,y)$ é perpendicular a circunferência de centro na origem e raio $|\vec{r}|$. Assim, na Figura 3.6, temos uma representação desse campo.

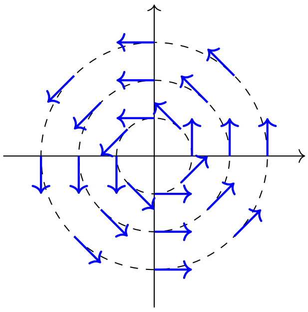

Figura 3.6: Representação do campo vetorial definido por $\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$.

■

Exemplo 3.1.11 *Considere o campo vetorial definido por*

$$\vec{f}(x,y,z) = -k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

onde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ *é o vetor posição e* k *é uma constante positiva. Então, represente geometricamente esse campo vetorial.*

Solução: O campo vetorial definido por $\vec{f}$ é usado para descrever a força gravitacional de uma partícula de massa M, situada na origem, sobre outra partícula de massa m situada no ponto $P = (x,y,z)$. Observe que $\vec{f}(x,y,z)$ não está definida na origem; além disso, $|\vec{f}(x,y,z)| = k\frac{|\vec{r}|}{|\vec{r}|^3} = k\frac{1}{|\vec{r}|^2}$, ou seja, o módulo do vetor $\vec{f}(x,y,z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P a origem.

Por fim, temos que $\vec{f}(x,y,z)$ é um múltiplo escalar negativo do vetor posição $\vec{r}$ e, por isso, ele tem a mesma direção do vetor posição mas tem o sentido contrário. Assim, na Figura 3.7, temos uma representação desse campo.

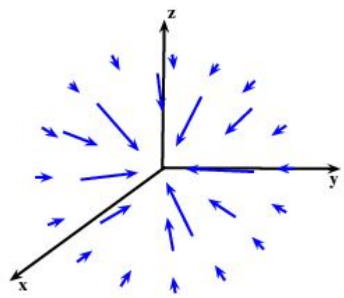

Figura 3.7: Representação do campo vetorial $\vec{f}(x,y,z) = -k\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

■

Observação 3.1.2 *a) O campo vetorial do Exemplo 3.1.10 é chamado de Campo de Velocidade num Movimento Circular.*

b) O campo vetorial do Exemplo 3.1.11 é chamado de Campo Radial de Quadrado Inverso.

c) Existem vários outros exemplos de campos vetoriais no mundo real tais como o campo de velocidade de um fluido em movimento; um campo de força eletrostática originário de duas cargas de sinais opostos; o campo de velocidade de um volante no MCU; o campo de velocidade de um redemoinho; etc.

Agora, faça alguns exercícios. Bons estudos......

3.2 Exercícios

Exercício 3.2.1 *Represente graficamente os campos vetoriais abaixo.*

1. $\vec{f}(x,y) = (-x,-y)$;
2. $\vec{f}(x,y) = x^2\vec{j}$;
3. $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$;
4. $\vec{f}(x,y) = (-y,x)$;
5. $\vec{g}(x,y) = 2\vec{i}$;
6. $\vec{g}(x,y) = \vec{i}+\vec{j}$;
7. $\vec{g}(x,y) = 2\vec{i}+\vec{j}$;
8. $\vec{g}(x,y) = \dfrac{x\vec{i}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
9. $\vec{g}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;
10. $\vec{g}(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$;
11. $\vec{f}(x,y) = \vec{i}+x\vec{j}$;
12. $\vec{f}(x,y) = (-x,y)$;

13. $\vec{g}(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$; *14.* $\vec{g}(x,y,z) = \dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{x^2+y^2+z^2}$.

Exercício 3.2.2 *Considere o campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = (1, x-y)$. *Desenhe o campo nos pontos das retas:*

a) $y = x$; *b)* $y = x-1$; *c)* $y = x-2$.

Exercício 3.2.3 *Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retângulo, cuja base tem dimensões* $1m$ *e* $2m$ *e cuja altura é* $1,5m$. *O tanque está cheio de uma substância líquida com densidade variável. Em cada ponto a densidade é proporcional à distância do ponto até a superfície superior do tanque. Determine uma função que represente ao campo de densidade e determine as superfícies onde a densidade é constante.*

Exercício 3.2.4 *A temperatura nos pontos de um sólido esférico é dado pelo quadrado da distância do ponto até o centro da esfera. Usando coordenadas cartesianas, determine o campo de temperatura.*

Exercício 3.2.5 *Seja* A *um ponto fixo no espaço e seja* $d(P,A)$ *a distância de um ponto qualquer de* P *a* A. *Se* A *tem coordenadas cartesianas* (a,b,c) *e* $P = (x,y,z)$, *descreva analiticamente esse campo.*

Exercício 3.2.6 *O campo* $\vec{f}(x,y) = (y,-x)$ *representa a velocidade de um volante em rotação rígida, em torno do eixo* z. *Descrever graficamente o campo.*

Exercício 3.2.7 *Seja* $\vec{F} = \nabla f$, *onde* $f(x,y) = x+2y$. *Represente graficamente o campo vetorial definido por* $\vec{F}$ *na reta* $x+2y=1$.

Exercício 3.2.8 *Seja* $\vec{G} = \nabla g$, *onde* $g(x,y) = y-x^2$. *Represente graficamente o campo vetorial definido por* $\vec{G}$ *na parábola* $y = x^2$.